Mecânica dos Fluidos - FMA 324 10. semestre de 1999

M. Y. Kucinski Instituto de Física da Universidade de São Paulo C. P. 66318, CEP 05315-970, São Paulo, SP, Brazil

Índice

Prefácio								
Símbolos								
1	Descrição do escoamento de um fluido							
	1.1							
	1.2	, , ,						
			o ao tempo	2				
	1.3	<u>, </u>						
	1.4							
	1.5	-						
		1.5.1	Vórtice					
		1.5.2	Referencial Inercial e Referencial Girante	9				
		1.5.3	Força centrífuga e força de Coriolis	10				
		1.5.4	Referencial na superficie terrestre	10				
2	Equação de Continuidade							
_	2.1	1 3						
	2.2		ão de continuidade (ou de conservação na forma diferencial)					
3	Eau	ıacões	de Navier-Stokes e de Euler	19				
	3.1	. 3						
		3.1.1	Tensor de tensão					
		3.1.2	Distorção de um elemento do fluido.					
		3.1.3	Lei de Stokes: relação entre a tensão e a deformação					
	3.2	Equaç	ões de Navier-Stokes e de Euler.					
	3.3	Condições de contorno						
	3.4	-						
		3.4.1	Escoamentos incompressíveis retilineos	33				
		3.4.2	Escoamentos incompressíveis circulares	37				
	3.5	Atmosfera terrestre						
	3.6							
		3.6.1						
		3.6.2	Similaridade geométrica					
		3.6.3	Similaridade dinâmica					
		3.6.4	Equações adimensionais de Navier-Stokes	43				

 $\acute{I}NDICE$

4	Conservação de energia	51				
	4.1 Noções de termodinâmica					
	4.1.1 Equação de estado	51 51				
	4.1.2 Potenciais termodinâmicos	52				
	4.2 Equação da energia mecânica	54				
	4.3 Equação da energia total	60				
	4.4 Equação da energia interna	62				
	4.5 Equação da entropia	63				
	4.6 Equação da entalpia	63				
5	Vorticidade	66				
	5.1 Vorticidade e Circulação da velocidade	66				
	5.2 Equação de transporte de vorticidade	67				
	5.3 Vorticidade de fluidos ideais	69				
6	Escoamento potencial.	75				
	6.1 Escoamento incompressível bi-dimensional	76				
	6.1.1 Equação diferencial para $\Psi(\vec{r},t)$	77				
	6.2 Escoamento potencial	78				
	6.2.1 Equações diferenciais para o potencial $\varphi(\vec{r},t)$ e pressão $P(\vec{r},t)$	78				
	6.3 Fluido incompressível e irrotacional	80				
7	Esfera movendo num fluido viscoso.	85				
\mathbf{A}	Algumas relações vetoriais	88				
	A.1 Fórmulas vetoriais	88				
	A.2 Teoremas do Cálculo Vetorial	88				
	A.3 Formas explícitas das operações vetoriais	89				
В	B Relações da termodinâmica					
Índice Remissivo						
D:	Ribliografia					
υl	Bibliografia					

ÍNDICE i

Prefácio

Este texto foi escrito para servir como roteiro para o curso de Mecânica dos Fluidos, no Instituto de Física da USP, de 1998 a 1999. É um curso de graduação de um semestre, de 2 horas e meia semanais, obrigatório para alunos de Meteorologia e optativo para os alunos de Física. As turmas, em geral, são heterogêneas, com estudantes em diferentes estágios de formação. São considerados pré-requisitos apenas os cursos básicos de Física Geral e Cálculo Diferencial e Integral.

Seguiu-se a estrutura do livro do Brown[1]: são introduzidas inicialmente as equações fundamentais de fluidos reais, com viscosidade, e depois discutida a aproximação de fluido ideal. Muitos trechos foram extraidos das referencias citadas e adaptadas.

Em cada aula foram distribuidas listas de questões. As respostas eram recolhidas na aula seguinte. São questões simples que apenas requerem leitura e compreensão da matéria da aula anterior. Elas se encontram no final de cada capítulo.

O curso foi avaliado como sendo difícil, por pràticamente todos os alunos.

2 de agosto de 1999.

M. Y. Kucinski

Símbolos

 $\vec{\zeta}$ vorticidade

 $c_P,c_{\mathcal{V}}\,$ calor específico por unidade de massa a pressão ou volume constante $\overrightarrow{f^V},\overrightarrow{f^S}$ força por unidade de massa, volumétrica e superficial $\overrightarrow{g_{ef}}$ gravidade efetiva \mathcal{H} entalpia por unidade de massa \vec{J} densidade de corrente M número de Mach P pressão R constante dos gases ideais Re número de Reynolds Ro número de Rossby \mathcal{S} entropia por unidade de massa T temperatura ${\cal V}$ volume por unidade de massa \vec{v} velocidade β, λ longitude, latitude γ constante dos gases perfeitos (c_P/c_v) \mathcal{U} energia interna por unidade de massa η, ζ coeficientes de viscosidade ν viscosidade cinética $\overrightarrow{\Pi}$ tensor densidade de fluxo de momento linear ρ densidade $\stackrel{\leftrightarrow}{\sigma}$ tensor das tensões $\stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'}$ tensor das forças viscosas

Capítulo 1

Descrição do escoamento de um fluido

1.1 Descrição Lagrangeana e Euleriana.

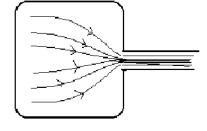
O objetivo da Física clássica é descrever a evolução de um sistema sob a ação de forças e outros fatores. Num referencial **Lagrangeano** a posição e outras propriedades de um corpo são identificadas num determinado instante e a evolução subsequente é descrita em termos de funções de t. Os fluidos não têm forma própria, o que significa que o relevante na hidrodinâmica é o estudo dos movimentos relativos das diferentes partes. Em geral, ao lidar com o movimento de fluidos não estamos interessados em acompanhar a evolução de uma porção particular do fluido mas em obter um mapeamento numa certa região, a cada instante, de algumas propriedades <u>macroscópicas</u> do fluido. Descrevemos matemàticamente o fluido usando funções do campo de escoamento: a velocidade $\vec{v}(\vec{r},t)$ e duas grandezas termodinâmicas quaisquer, por exemplo, a densidade $\rho(\vec{r},t)$ e a pressão $P(\vec{r},t)$. Sabe-se que todas as funções termodinâmicas de estado podem ser determinadas, se conhecidas duas delas, a partir da equação de estado. Portanto, o estado de movimento de um fluido é completamente determinado se conhecidos $\vec{v}(\vec{r},t)$, $\rho(\vec{r},t)$ e $P(\vec{r},t)$.

As variáveis \vec{r} e t são independentes. Esta descrição chamada **Euleriana** é mais diretamente relacionada com a observação. A descrição Lagrangeana é mais diretamente ligada às equações da dinâmica do fluido (leis de Newton, processos termodinâmicos).

Em hidrodinâmica, lidamos com 3 equações fundamentais que descrevem a evolução temporal destas grandezas (ou a conservação), a equação de estado e uma relação que define o processo termodinâmico.

O que distingue os gases dos líquidos é a compressibilidade.

Exemplo 1.1 Consideremos um recipiente com gás sob pressão e um pequeno orificio (dimensão linear do orificio << outras dimensões lineares do recipiente) de modo que o escoamento é quase estacionário durante um intervalo de tempo razoável. O padrão é independente do tempo e as grandezas físicas podem ser escritas como



$$\rho(\vec{r}), P(\vec{r}), \vec{v}(\vec{r}) \cdots$$

Estas funções não contem explicitamente t porque em cada posição os valores das grandezas não mudam com o tempo mas se acompanharmos o movimento de uma porção do fluido, ρ, P, v... variam. Com certeza, a velocidade é muito maior perto do orificio.

Exemplo 1.2 O escoamento dentro do mesmo recipiente, com orificio maior, pode variar sensivelmente com o tempo e as grandezas ficariam

$$\rho(\vec{r},t), P(\vec{r},t), \vec{v}(\vec{r},t)...$$

1.2 Derivada total, substancial ou material de uma variável de campo em relação ao tempo.

Para descrever a evolução temporal de um escoamento precisamos calcular a derivada total em relação ao tempo de grandezas da forma $\Phi(\vec{r},t)$. Por exemplo, $\rho(\vec{r},t)$, $P(\vec{r},t)$, $\vec{v}(\vec{r},t)$ etc. Esta derivada, também chamada substancial ou material porque é calculada acompanhando cada elemento do fluido é

$$\frac{D\Phi}{Dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi(\vec{r} + \delta \vec{r}, t + \Delta t) - \Phi(\vec{r}, t)}{\Delta t}.$$

Durante o intervalo de tempo Δt o elemento de fluido se deslocou de $\delta \vec{r} = \vec{v} \Delta t$.

$$\frac{D\Phi}{Dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi(\vec{r} + \vec{v}\Delta t, t + \Delta t) - \Phi(\vec{r}, t)}{\Delta t}$$

$$= \vec{v} \cdot \nabla \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

A demonstração fica mais simples se usar coordenadas cartesianas. Para tornar a escrita mais econômica introduzimos a seguir, algumas notações.

Notações

- $\bullet (v_x, v_y, v_z) \equiv (v_1, v_2, v_3) \equiv (v_i).$
- $(\vec{1}, \vec{j}, \vec{k}) \equiv (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}) \equiv (\vec{e_i})$
- Notação de Einstein para somatoria: $\sum_{i=1}^{3} A_{ii} \equiv A_{ii}$.
- $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}; \qquad \partial_t \equiv \frac{\partial}{\partial t}$

Exercício. Usando estas notações, escrever como expressões vetoriais as seguintes relações:

$$B_i \vec{e_i}; \quad A_i B_i; \quad \partial_i A_i \quad e \quad \partial_i \partial_i \equiv \partial_i^2.$$

A derivada total acima pode ser calculada usando as coordenadas (x, y, z) escrevendo função $\Phi(x, y, z, t)$ e $\delta x_i = v_i \Delta t$:

$$\frac{D\Phi}{Dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z, t + \Delta t) - \Phi(x, y, z, t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\partial \Phi(x_j, t)}{\partial x_i} \frac{\delta x_i}{\Delta t} + \frac{\partial \Phi(x_j, t)}{\partial t}$$

$$\equiv \nabla \Phi \cdot \vec{v} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

Exemplo 1.3 A velocidade de escoamento unidimensional de um fluido é dada por v = 2/x e a densidade $\rho = (x^2 + 1)e^{-2t}$. Considere um elemento do fluido que passa por x = 1 no instante t = 0. Determine $D\rho/Dt$ e a aceleração do elemento no instante t = 2.

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + v\frac{\partial\rho}{\partial x}$$

$$= -2(x^2 + 1)e^{-2t} + \frac{2}{x}2xe^{-2t}$$

$$= 2(1 - x^2)e^{-2t}.$$

É preciso determinar a posição do elemento do fluido no instante t=2. Se v=2/x,

$$\dot{x} = \frac{2}{x}$$
 \Rightarrow $x\dot{x} = 2$ \Rightarrow $x^2 = 4t + constante$ \Rightarrow $x = \sqrt{4t + constante}$.

A condição x=1 no instante t=0 dá $x=\sqrt{4t+1}$ e portanto em t=2, x=3.

$$\left(\frac{D\rho}{Dt}\right)_{t=2} = -16e^{-4}.$$

A aceleração pode ser determinada derivando v = 2/x:

$$\dot{v} = -\frac{2}{x^2}\dot{x} = -\frac{2}{x^2}v = -\frac{4}{x^3} = -\frac{4}{27}$$

ou usando a expressão da derivada total

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2 - 2}{x x^2}.$$

A aceleração de um elemento de fluido é obtida calculando

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}.$$

 $\nabla \vec{v}$ não é escalar nem vetor. É um tensor de 2a. ordem. No contexto, não é importante saber o que é êste tensor. Basta saber que

$$\begin{split} \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} &= (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \\ &= v_i \partial_i \vec{v} = v_i \partial_i (v_j \, \overrightarrow{e_j}) \\ &= (\vec{v} \cdot \nabla v_j) \, \overrightarrow{e_j} \, . \end{split}$$

Exemplo 1.4 A velocidade de escoamento de um fluido é dada por $\vec{v} = x\vec{i} - (y+t)\vec{j}$. Determine a aceleração em cada ponto do fluido, em um instante qualquer t.

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$$

$$= -\vec{J} + \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}\right) (x\vec{1} - (y+t)\vec{J})$$

$$= -\vec{J} + \left(x \frac{\partial}{\partial x} - (y+t) \frac{\partial}{\partial y}\right) (x\vec{1} - (y+t)\vec{J})$$

$$= -\vec{J} + x\vec{1} - (y+t)(-\vec{J})$$

1.3 Linhas de fluxo. Trajetória.

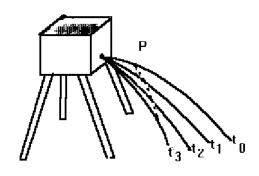
- Cada elemento de fluido segue um caminho; é a trajetória. Para visualizar pode-se derrubar um pingo de tinta.
- Linhas de fluxo (ou linhas de corrente ou linhas de velocidade) <u>num dado instante</u>, são as linhas tangentes ao vetor velocidade em cada ponto, nesseinstante.

Sejam \vec{r} e $\vec{r}+d\vec{r}$ dois pontos de uma mesma linha de fluxo num certo instante. \vec{v} e $d\vec{r}$ têm a mesma direção. Portanto

$$\vec{v} \times d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \vec{1} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}.$$
 (1-1)

Estas são as equações das linhas de fluxo na forma diferencial.

Exemplo 1.5 Considere um tanque com água a uma certa altura do chão e um pequeno orificio. A medida que diminui o nível de água no tanque a água sai do orificio com velocidade menor. A figura representa aproximadamente as fotografias instantaneas nos diferentes instantes t_0, t_1, t_2 e t_3 . Estas linhas não são linhas de fluxo nem trajetorias de elementos do fluido. Seriam se o nível de água do tanque não diminuisse com o tempo. Uma gota de tinta na posição P do fio de água, no instante t_0 , segue aproximadamente a trajetória marcada pela linha pontilhada.



Exemplo 1.6 Considere a velocidade de escoamento do exemplo (1.4): $\vec{v} = x\vec{i} - (y+t)\vec{j}$. Como deve ser a trajetória do elemento de fluido que passa por $(x,y) \equiv (1,1)$ no instante t=0? Como seria, no instante t=0, a linha de fluxo que passa pelo ponto $(x,y) \equiv (1,1)$?

$$\dot{x}\vec{1} + \dot{y}\vec{j} = x\vec{1} - (y+t)\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = x \ e \ \dot{y} = -y - t \quad \Rightarrow \quad x = e^t; \ e \ y = 1 - t.$$

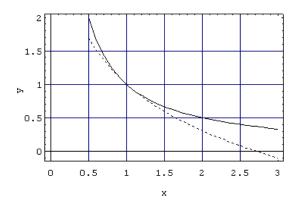
As constantes de integração são determinadas de modo que a curva passe por (1,1) no instante inicial. (x(t),y(t)) é a equação horária e também a equação da trajetória na forma paramétrica (parâmetro t). A equação da trajetória na forma explícita é obtida eliminando t:

$$x = exp(1 - y).$$

A linha de corrente é obtida usando (1-1):

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y+t} \quad \Rightarrow \quad \ell nx = -\ell n(y+t) + \ell nC; \quad C = constante \quad \Rightarrow \quad x(y+t) = C.$$

A curva que passa por (1,1) no instante t=0 deve ser xy=1. Na figura a linha de fluxo é representada pela curva contínua e a trajetória pela linha pontilhada.



1.4 Divergência de um campo vetorial.

• Representação em coordenadas cartesianas:

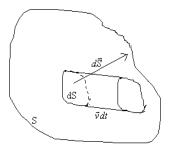
$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$
$$\equiv \frac{\partial A_j}{\partial x_j} \equiv \partial_j A_j$$

• <u>Fluxo de massa</u> através de uma superficie S.

A densidade de massa é dada por:

$$\rho(\vec{r},t) \equiv \lim_{\delta V \to 0} \frac{\delta M}{\delta V},$$

onde δM é a massa contida num elemento de volume δV . O fluxo é a massa que atravessa um elemento de área dS, por unidade de tempo. A massa que atravessa dS durante um intervalo de tempo dt ocupa o volume de um cilindro de área de base dS e geratriz da superficie lateral $\vec{v}dt$, que é $d\vec{S} \cdot \vec{v}dt$.



 $d\vec{S}$ é um vetor de módulo dS, normal à superfície, com sentido para fora se for parte de uma superfície fechada e com sentido arbitràriamente fixado se for uma superfície aberta

Esta quantidade é portanto $(d\vec{S} \cdot \vec{v}dt)\rho$.

Então, o fluxo através de uma superficie qualquer ${\cal S}$ fica

Fluxo de
$$M = \int_{S} (d\vec{S} \cdot \vec{v}) \rho$$
.

 $\rho \vec{v}$ é definida como densidade de corrente de massa.

Anàlogamente definimos

• Fluxo de uma grandeza Γ (escalar, vetorial ou tensorial) através de uma superficie, transportada pelo fluido.

Seja $\gamma(\vec{r},t)$ uma grandeza específica relacionada a Γ :

$$\gamma(\vec{r},t) \equiv \lim_{\delta V \to 0} \frac{\delta \Gamma}{\delta V}.$$

 $\delta\Gamma$ é a quantidade contida num elemento de volume δV . O fluxo seria a quantidade de Γ que atravessa um elemento de área dS, por unidade de tempo. A quantidade que atravessa dS durante um intervalo de tempo dt levado pelo fluido é $(d\vec{S} \cdot \vec{v}dt)\gamma$.

O fluxo através de uma superficie qualquer S fica

Fluxo de
$$\Gamma = \int_{S} (d\vec{S} \cdot \vec{v}) \gamma$$
.

 $\gamma \vec{v}$ é definida como densidade de corrente de Γ e o seu significado é de quantidade de Γ que passa através de uma superficie, por unidade de área, por unidade de tempo, transportado pelo fluido.

A densidade de corrente não está necessariamente associada a movimento de matéria. Podemos definir a **densidade de corrente** \vec{J} como um vetor na direção e sentido do transporte da grandeza em questão (Γ) e módulo igual à quantidade de Γ que passa através de uma superficie, por unidade de área, por unidade de tempo, independente do mecanismo de transporte da grandeza. O fluxo através de S seria

$$\int_{S} (d\vec{S} \cdot \vec{J}).$$

Teorema 1.1 (Teorema da divergência, de Gauss)

$$\int_{V} dV \ \nabla \cdot \vec{A} = \int_{S} d\vec{S} \cdot \vec{A} \tag{1-2}$$

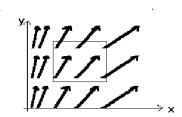
onde V é um volume limitado pelo contorno S; dV e $d\vec{S}$ são elementos de volume e área, respectivamente; o sentido de $d\vec{S}$ é para fora; \vec{A} é função bem comportada dentro de V.

O cálculo da integral de volume depende do conhecimento de $\nabla \cdot \vec{A}$ em todos os pontos interiores à região; o teorema diz que o seu valor só depende dos valores de \vec{A} na borda da região.

Podemos dizer que $\nabla \cdot \vec{A}$ em um ponto é o fluxo de \vec{A} através do contorno de uma região infinitesimal em torno do ponto considerado, dividido pelo volume da região, isto é, é a densidade de fluxo.

Num campo divergente \vec{v} , $\nabla \cdot \vec{v}$ é positivo; num campo convergente $\nabla \cdot \vec{v}$ é negativo. Um campo vetorial de divergente identicamente nulo é chamado **solenoidal**.

Exemplo 1.7 Se o campo de escoamento de um fluido incompressível é definido por $\vec{v} = 3x\vec{1} + \vec{j}$, $\implies \nabla \cdot \vec{J} = \nabla \cdot \rho \vec{v} = 3\rho > 0$ e portanto há mais fluido saindo do que entrando numa região.



Exemplo 1.8 Um campo eletrostático satisfaz à equação (de Maxwell) $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$, onde ρ é a densidade de carga elétrica.

Exemplo 1.9 Um campo magnético é solenoidal, isto é, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.

1.5 Vorticidade

Vorticidade é um conceito associado à rotação de um elemento do fluido e é definido matemàticamente como o vetor

$$\vec{\zeta} \equiv \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{1} & \vec{J} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_x & v_y & v_z \end{pmatrix}.$$

Teorema 1.2 (de Stokes)

$$\int_{S} d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \oint_{C} d\vec{\ell} \cdot \vec{A}$$
 (1-3)

onde S é uma superficie aberta limitada pelo contorno C; $d\vec{S}$ e $d\vec{\ell}$ são elementos de área e linha, respectivamente; o sentido de $d\vec{S}$ é definido pela regra da mão direita em relação ao sentido da integral de linha ao longo de C; \vec{A} é função bem comportada sôbre S.

Se $\vec{\zeta} \neq 0$ então existe uma superficie S onde $\int_S d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{v}) \neq 0$ e portanto $\oint_C d\vec{\ell} \cdot \vec{v} \neq 0$, isto é há uma circulação de \vec{v} ao longo de C.

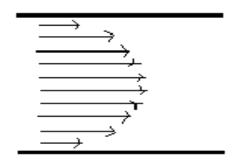
Exemplo 1.10 Considere o escoamento de um líquido entre duas placas paralelas, num regime estacionário (veja a figura que segue). A velocidade vai ser sempre na mesma direção (seja x), e o módulo da velocidade varia na direção perpendicular às placas (seja y). A vorticidade será

$$\vec{\zeta} \equiv \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v} = -\frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{k}.$$

Portanto, a vorticidade tem sentidos opostos nas duas metades do fluido.

A vorticidade de um redemoinho pode ser medida experimentalmente usando uma roda de tamanho da mesma ordem ou menor que o redemoinho, que flutua no fluido, e com pás na borda de modo que acompanha o redemoinho (parte direita da figura).

Se o medidor de vorticidade for colocado, deslocado da posição exatamente média, êle deve girar.





1.5.1 Vórtice

Chamamos de vórtice o movimento de um fluido em torno de um eixo. A vorticidade está concentrada no eixo; fora do eixo pode ser zero. Um exemplo são os ciclones.

Exemplo 1.11 (Vórtice forçado) Quando um balde, com água, gira com velocidade angular Ω constante, depois de algum tempo a água fica num estado estacionário devido à viscosidade e gira como um todo. Este escoamento é chamado vórtice forçado. O sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) com o eixo z coincidindo com o eixo de rotação é o mais adequado para descrever os vórtices devido a simetria.

$$\vec{v} \equiv (v_r, v_\theta, v_z) = (0, v_\theta, 0) = (0, \Omega r, 0).$$

A vorticidade fica

$$\nabla \times \vec{v} = \vec{e_r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) + \vec{e_\theta} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \vec{e_z} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)$$
$$= \vec{e_z} \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_\theta)}{\partial r} = \vec{e_z} 2\Omega = 2\vec{\Omega}.$$

Portanto a vorticidade é a velocidade angular de rotação.

Exemplo 1.12 (Vórtice livre) Um líquido sem viscosidade, em regime estacionário de rotação pode ter a velocidade da forma

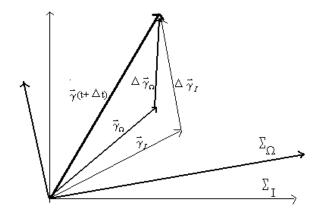
$$\vec{v} \equiv (v_r, v_\theta, v_z) = (0, v_\theta, 0)$$

com $rv_{\theta} = C$, onde C é uma constante. O momento angular de um elemento de fluido de volume δV seria $(\rho \delta V)rv_{\theta} = constante$. Portanto cada elemento do fluido conserva o seu momento angular. Neste caso $\nabla \times \vec{v} = 0$, exceto na origem. Muito próximo dêste caso é o escoamento de áqua numa pia com o ralo aberto ou um furação.

Os vórtices aparecem na atmosfera terrestre e nos oceanos devido à rotação da Terra. As equações da Mecânica de Newton valem num referencial inercial; as observações são feitas na superficie terrestre que é um referencial girante em relação a um inercial. Para relacionar as equações da hidrodinâmica nos dois referenciais é preciso escrever a relação entre as derivadas totais em relação ao tempo, nos dois referenciais.

1.5.2 Referencial Inercial e Referencial Girante.

Consideremos um referencial (Σ_{Ω}) que gira com velocidade angular $\overrightarrow{\Omega}$ constante em relação a um referencial inercial (Σ_I) . Tomando o eixo de rotação como eixo z, podemos escrever $\overrightarrow{\Omega} \equiv \Omega \vec{k}$. Vamos calcular a variação de uma grandeza representada por $\overrightarrow{\gamma}(t)$. Num instante t esta grandeza é registrada como $\overrightarrow{\gamma_I}(t)$ no referencial inercial Σ_I e como $\overrightarrow{\gamma_\Omega}(t)$ no referencial girante Σ_Ω .



Num instante posterior $t + \Delta t$ o vetor será $\overrightarrow{\gamma}(t + \Delta t)$. Durante êste intervalo de tempo $\overrightarrow{\gamma}_{\Omega}(t)$ girou junto com o referencial Σ_{Ω} e portanto no instante $t + \Delta t$,

$$\overrightarrow{\gamma_{\Omega}}(t) = \overrightarrow{\gamma_{I}}(t) + \overrightarrow{\Omega} \Delta t \times \overrightarrow{\gamma_{I}}(t).$$

$$\overrightarrow{\gamma}(t + \Delta t) = \overrightarrow{\gamma_I}(t) + \Delta \overrightarrow{\gamma_I} = \overrightarrow{\gamma_\Omega}(t) + \Delta \overrightarrow{\gamma_\Omega} = \overrightarrow{\gamma_I}(t) + \overrightarrow{\Omega} \Delta t \times \overrightarrow{\gamma_I}(t) + \Delta \overrightarrow{\gamma_\Omega}.$$

Fazendo

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\gamma}(t + \Delta t) - \overrightarrow{\gamma_I}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{\gamma_I}}{\Delta t} = \left(\frac{d \overrightarrow{\gamma}}{dt}\right)_I;$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{\gamma_\Omega}}{\Delta t} = \left(\frac{d \overrightarrow{\gamma}}{dt}\right)_{\Omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{\gamma_I}(t) = \overrightarrow{\gamma}(t)$$

temos

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\gamma}}{dt}\right)_{I} = \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{\gamma}(t) + \left(\frac{d\overrightarrow{\gamma}}{dt}\right)_{\Omega} \equiv \left(\overrightarrow{\Omega} \times + \left(\frac{d}{dt}\right)_{\Omega}\right) \overrightarrow{\gamma}(t) \tag{1-4}$$

Interessa-nos calcular as relações entre as velocidades e as acelerações nos dois referenciais. Como

$$\overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}; \quad \overrightarrow{a_I} = \left(\frac{d\overrightarrow{v_I}}{dt}\right)_I; \quad e \quad \overrightarrow{a_\Omega} = \left(\frac{d\overrightarrow{v_\Omega}}{dt}\right)_\Omega,$$

usando a equação (1-4) obtemos

$$\overrightarrow{v_I} = \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{r} + \overrightarrow{v_{\Omega}} \tag{1-5}$$

 \mathbf{e}

$$\overrightarrow{a_I} = \overrightarrow{\Omega} \times (\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{r}) + 2\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{v_\Omega} + \overrightarrow{a_\Omega}.$$

Chamando de $\overrightarrow{r_{\perp}}$ a componente de \overrightarrow{r} perpendicular a $\overrightarrow{\Omega}$ obtemos

$$\overrightarrow{\Omega} \times (\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{r}) = \overrightarrow{\Omega} \times (\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{r_{\perp}}) = -\Omega^2 \overrightarrow{r_{\perp}}$$

Portanto temos

$$\overrightarrow{a_I} = \overrightarrow{\Omega} \times (\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{r}) + 2\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{v_\Omega} + \overrightarrow{a_\Omega} = -\Omega^2 \overrightarrow{r_\perp} + 2\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{v_\Omega} + \overrightarrow{a_\Omega}. \tag{1-6}$$

1.5.3 Força centrífuga e força de Coriolis

Num referencial inercial pode-se escrever a equação de Newton para uma partícula de massa m como

$$\sum \overrightarrow{F}_{real} = m \overrightarrow{a_I}, \tag{1-7}$$

onde $\sum \overrightarrow{F}_{real}$ é a soma de todas as forças reais que atuam sôbre o corpo. Usando (1-6) temos

$$\sum \overrightarrow{F}_{real} = -m\Omega^2 \overrightarrow{r_{\perp}} + 2m \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{v_{\Omega}} + m \overrightarrow{a_{\Omega}}.$$

Rearranjando esta equação, podemos escrever a aceleração no referencial girante como resultante de forças reais e ficticias, numa forma análoga à (1-7):

$$m\overrightarrow{a_{\Omega}} = \sum \overrightarrow{F}_{real} + m\Omega^2 \overrightarrow{r_{\perp}} - 2m\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{v_{\Omega}} \equiv \sum \overrightarrow{F}$$
 (1-8)

onde

$$\sum_{\overrightarrow{F}} \overrightarrow{F} \equiv \sum_{real} \overrightarrow{F}_{real} + \sum_{real} \overrightarrow{F}_{ficticia};$$

$$\sum_{\overrightarrow{F}} \overrightarrow{F}_{ficticia} \equiv m\Omega^2 \overrightarrow{r_{\perp}} - 2m \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{v_{\Omega}};$$

$$\overrightarrow{F}_{centrifuga} \equiv m\Omega^2 \overrightarrow{r_{\perp}};$$

$$\overrightarrow{F}_{Coriolis} \equiv -2m \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{v_{\Omega}}.$$

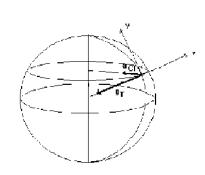
A força centrifuga independe do movimento do corpo; depende da rotação do referencial e da distância radial do eixo de rotação do referencial.

A força de Coriolis é, em módulo, proporcional à velocidade do corpo no referencial girante $\overrightarrow{v_{\Omega}}$; sua direção é sempre <u>perpendicular</u> a $\overrightarrow{v_{\Omega}}$ e portanto não muda o $|\overrightarrow{v_{\Omega}}|$ mas sim a sua direção.

1.5.4 Referencial na superfície terrestre

Aceleração gravitacional efetiva Um corpo solto na superficie terrestre fica sujeito a uma aceleração $\overrightarrow{g_T}$ em relação a um referencial inercial devido ao campo gravitacional terrestre: $g_T \equiv GM_T/R_T^2$, onde M_T e R_T são a massa e o raio da Terra, respectivamente. Em relação ao referencial que gira junto com a superficie da Terra, a aceleração será $\overrightarrow{a}_{\Omega}$:

$$\overrightarrow{a_{\Omega}} = \overrightarrow{g_T} + \Omega^2 \overrightarrow{r_{\perp}} - 2 \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{v_{\Omega}} \equiv \overrightarrow{g}_{ef} - 2 \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{v_{\Omega}}.$$
(1-9)



Chamamos de gravidade efetiva o vetor

$$\overrightarrow{g}_{ef} \equiv \overrightarrow{g_T} + \overrightarrow{a_{CF}} \equiv \overrightarrow{g_T} - \Omega^2 \overrightarrow{r_\perp},$$

que é a parte de $\overrightarrow{a\Omega}$ que não depende da velocidade. Na superficie terrestre podemos tomar como referencia os eixos coordenados:

x na direção do paralelo local, medindo a longitude (β) ;

y na direção do meridiano local, medindo a latitude (λ)

e z na direção vertical medindo a altitude.

A velocidade angular dêste referencial é a velocidade de rotação da Terra

$$\overrightarrow{\Omega} = \Omega \sin \lambda \overrightarrow{k} + \Omega \cos \lambda \overrightarrow{J}.$$

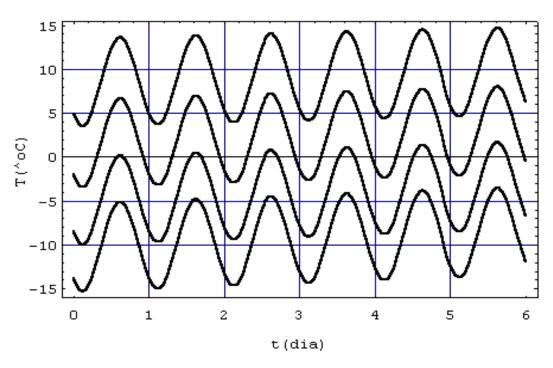
O têrmo de Coriolis fica

$$-2\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{v_{\Omega}} = -2 \begin{vmatrix} \overrightarrow{1} & \overrightarrow{J} & \overrightarrow{k} \\ 0 & \Omega \cos \lambda & \Omega \sin \lambda \\ v_{x} & v_{y} & v_{z} \end{vmatrix}$$
$$= (2\Omega \sin \lambda v_{y} - 2\Omega \cos \lambda v_{z}) \overrightarrow{1} - 2\Omega \sin \lambda v_{x} \overrightarrow{J} + 2\Omega \cos \lambda v_{x} \overrightarrow{k} (1-10)$$

O têrmo de Coriolis devido à componente vertical de $\overrightarrow{\Omega}$ ($\Omega \sin \lambda \overrightarrow{k}$) é $-2\Omega \sin \lambda \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{v_{\Omega}}$. Ele vai fazer com que o movimento horizontal da massa atmosférica se torne um turbilhão; devido a dependência com $\sin \lambda$ o sentido do turbilhão vai depender do hemisfério.

Problemas

1. No oceano Atlântico, a longitude 10^0W , há navios ancorados nas latitudes 40^0N , 50^0N , 60^0N e 70^0N , medindo cada um a temperatura local do ar. As medições durante 6 dias são mostradas no gráfico. Quanto mais ao N as temperaturas são mais baixas.



- (a) Interprete o gráfico.
- (b) Um outro navio parte da posição do 1o. navio, exatamente a 0 hora do primeiro dia correspondente ao gráfico acima, na direção dos outros navios ancorados, levando 2 dias entre cada 2 deles. A temperatura é medida neste navio sempre a 0 hora. Marque no gráfico acima as temperaturas medidas neste navio.

Observação: os gráficos representam a função

$$T(\lambda, t) = 5 + 20\cos\left(\frac{\lambda\pi}{90}\right) + 20\sin\left(\frac{\lambda\pi}{180}\right)\sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) - 5\cos\left(2\pi(t - .125)\right)$$

onde λ é a latitude em ${}^{0}N$.

2. (a) A temperatura da água num canal de 10km é estacionária e dada por

$$T(x,t) = (x+10),$$

onde x é a posição medida ao longo do canal, em km, a partir de uma das extremidades. A velocidade da água é de 20km/h. Qual é a taxa de variação da temperatura de uma porção de água quando passa por x = 2km?

(b) A temperatura da água num canal de 10km é homogênea e dada por

$$T(x,t) = 10e^{-t/12},$$

onde t é o instante de tempo, medido em hora. A velocidade da água é de 20km/h. Qual é a taxa de variação da temperatura medida com um termômetro colocado na posição x=2km no instante t=12h?

(c) A temperatura da água num canal de 10km é dada por

$$T(x,t) = (x+10)e^{-t/12},$$

onde x é a posição medida ao longo do canal, em km, a partir de uma das extremidades e t é o instante de tempo, medido em hora. A velocidade da água é de 20km/h.

- i. Qual é a taxa de variação da temperatura medida com um termômetro colocado na posição x=2km no instante t=12h?
- ii. Qual é a taxa de variação da temperatura de uma porção de água que passa por x=2km no instante t=12h?
- 3. Considere a velocidade de escoamento de um líquido descrita, na superficie, pelo vetor

$$\vec{v} = cx\vec{i} - cy\vec{j}, \quad c = 0, 1s^{-1}$$
em MKS.

Uma rolha está flutuando na posição $(x_0, y_0) \equiv (1, 4)$ num dado instante 0

- (a) Determine a velocidade da rolha na posição $(x_0, y_0) \equiv (1, 4)$.
- (b) Determine a aceleração da rolha nesta mesma posição.
- (c) Determine a aceleração da rolha num instante posterior quando está numa posição genérica (x, y).
- (d) Escreva a equação da trajetória da rolha.
- (e) Determine a posição da rolha 10s depois.
- 4. Considere o escoamento descrito pela função velocidade $\vec{v}(\vec{r},t)=2x\vec{i}-xy\vec{j}$. O escoamento é rotacional? É divergente?
- 5. As equações de Maxwell para o campo eletrostático são:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \quad e \quad \nabla \times \vec{E} = 0.$$

O que causa fluxo de \vec{E} ? e circulação de \vec{E} ?

6. As equações de Maxwell para o campo magnetostático são:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
 e $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$,

onde \vec{J} é a densidade de corrente elétrica. O que causa fluxo de \vec{B} ? e circulação de \vec{B} ?

- 7. Explique porque, no escoamento em regime estático de um fluido incompressível, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.
- 8. Uma mesa gira uniformemente fazendo 1 volta em cada 10s; na mesa há uma canaleta na direção radial ao longo da qual uma formiga caminha com velocidade de 0,5cm/s, a partir do eixo.
 - (a) Mostre num desenho as posições da formiga em t=2,4,6...s vistas de um referencial parado
 - (b) Qual deve ser a força real que atua sôbre a formiga?

Capítulo 2

Conservação de Massa. Equação de Continuidade

As equações de movimento de fluidos são obtidas usando conceitos de conservação de grandezas físicas como massa e energia e a equação de Newton, relacionada com o momento linear.

Estas equações podem ser deduzidas para um elemento de fluido e escritas na forma de equação diferencial, ou, deduzidas para um volume fixo (**volume de controle**) e escritas na forma integral.

A forma integral é útil para estudar escoamentos confinados. Na geo e astrofísica o fluido é tipicamente não confinado e a forma diferencial é mais adequada.

Para cada tipo de problema precisamos de um número de equações igual ao número de grandezas físicas envolvidas. Na geofísica, em geral, as grandezas relevantes são a velocidade, a densidade, a temperatura e a pressão. (Na astrofísica, também o campo magnético.)

Se conhecidas duas funções termodinâmicas de estado, as outras podem ser determinadas, a partir delas, da equação de estado.

Portanto, precisamos de pelo menos 2 equações escalares básicas de hidrodinâmica, que podem ser as equações de conservação de massa e de energia. Além destas, precisamos de uma equação que descreva o processo termodinâmico e a equação de estado.

A outra equação fundamental referente a velocidade é vetorial e provém da equação de Newton.

A partir destas equações básicas, outras podem ser derivadas, de interesse para alguns problemas específicos como:

- equação da vorticidade;
- equação de escoamento potencial;
- equação de perturbação de um escoamento médio, usada para o estudo de ondas, instabilidades e turbulência.

Consideramos, na Física Clássica, que a massa não pode ser criada ou destruída. A massa de um elemento do fluido é a densidade vezes o volume.

2.1 Equação de conservação na forma integral

Consideremos como <u>volume de contrôle</u> V_0 , um volume fixo arbitrário na região do fluido. O contôrno é a superfície de contorno S_0 . A conservação de massa pode ser enunciada da seguinte forma:

Aumento de massa dentro de $V_0 = -$ fluxo de matéria para fora, através da borda S_0 . Escrevendo como

 $\frac{dM}{dt}=\frac{d}{dt}\int_{V_0}dV\rho=\int_{V_0}dV\frac{\partial\rho}{\partial t}$ a razão de aumento de massa no volume V_0 e

 $\int_{S_0} d\vec{S} \cdot (\rho \vec{v})$ o fluxo de massa para fora de V_0 , através de S_0 ,

obtemos a forma integral da equação de conservação.

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_0} dV \rho = -\int_{S_0} d\vec{S} \cdot (\rho \vec{v}). \tag{2-1}$$

 $\rho \vec{v}$ é a densidade de corrente de massa.

Para uma grandeza física extensiva qualquer Γ (escalar, vetorial, tensorial de qualquer ordem) e a função específica correspondente γ pode-se escrever uma equação integral semelhante que expressa a conservação, trocando $\{\rho, M\}$ por $\{\gamma, \Gamma\}$ e acrescentando um têrmo devido a fontes geradoras de Γ :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_0} dV \gamma = -\int_{S_0} d\vec{S} \cdot (\gamma \vec{v}) + \int_{V_0} dV q_{\gamma}. \tag{2-2}$$

 $\gamma \vec{v}$ seria a densidade de corrente de Γ , transportada pelo fluido e q_{γ} a densidade de Γ criado por uma fonte.

2.2 Equação de continuidade (ou de conservação na forma diferencial)

A equação (2-1) pode ser reescrita fazendo

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} dV \rho = \int_{V_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

e

$$\int_{S_0} d\vec{S} \cdot (\rho \vec{v}) = \int_{V_0} dV \nabla \cdot (\rho \vec{v}).$$

Na primeira expressão usou-se o fato de que V_0 é fixo e na segunda expressão o teorema de Gauss.

A equação fica

$$\int_{V_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) dV = 0.$$

Ela deve valer para qualquer V_0 e portanto, em cada ponto deve valer

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad \text{(Equação de continuidade)}$$
 (2-3)

Esta é a equação de continuidade e expressa a conservação de massa na forma diferencial. Usando a derivada substancial podemos reescrever

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0. \tag{2 - 3'}$$

Para uma grandeza qualquer γ ter-se-ia

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \nabla \cdot (\gamma \vec{v}) = q_{\gamma}. \tag{2-4}$$

A equação (2-3') dá a razão de variação da densidade de um elemento do fluido com o tempo, ao longo do movimento. Se não houver compressão ou descompressão $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ e a conservação de massa é expressa pela não divergência de velocidade

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0. \tag{2-5}$$

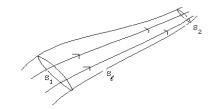
É ma função <u>solenoidal</u>.

Exemplo 2.1 (Vazão incompressível num tubo)

(da ref[1]) Considere um fluido num tubo de seção transversal não constante e uma região de controle V_0 definida pelas superfícies de contorno $S_1\&S_2\&S_\ell$.

$$\int_{V_0} dV \nabla \cdot \vec{v} = \int_{S_1 \& S_2 \& S_\ell} d\vec{S} \cdot \vec{v} = 0.$$

Se a velocidade média normal à seção S_i é v_i e a área da seção é A_i a integral fica $-A_1v_1 + A_2v_2 = 0$ pois



a integral na superfície lateral é nula. Av representa a vazão, ou seja, o volume do fluido que atravessa a seção transversal de área A por unidade de tempo. A vazão de um fluido incompressível é constante ao longo do tubo.

Exemplo 2.2 (Vazão estacionária de um fluido de densidade uniforme)

(da referência [1]) Considere um escoamento de um fluido de <u>densidade uniforme</u> num canal convergente. Determine a velocidade transversal v_y no caso de escoamento estacionário e bidimensional. A largura do canal é dada por

$$Y = \frac{Y_0}{1 + x/\ell}$$

Yo

e a velocidade na direção longitudinal é

$$v_x(x,y) = v_0 \left(1 + \frac{x}{\ell}\right) \left[1 - \left(\frac{y}{Y}\right)^2\right]$$

Se o escoamento é estacionário $\partial \rho/\partial t=0$ e vale $\nabla\cdot(\rho\vec{v})=0$. Como ρ é uniforme a equação se reduz a

$$\nabla \cdot \vec{v} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

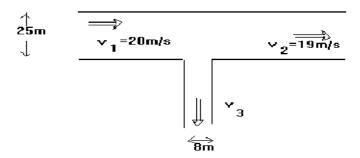
Usando a expressão dada de v_x esta equação pode ser integrada

$$v_y = -\frac{v_0}{\ell} \int \left[1 - 3\left(\frac{y}{Y}\right)^2\right] dy$$
$$= -\frac{v_0}{\ell} \left(y - \frac{y^3}{Y^2}\right) + C(x)$$

A função C(x) pode ser determinada usando a condição de simetria $v_y(x,y=0)=0$. C(x) deve ser nulo. Consequentemente

$$v_y(x,y) = -\frac{v_0}{\ell} \left(y - \frac{y^3}{Y^2} \right)$$

Exemplo 2.3 (da ref[1]) As ruas de uma cidade são corredores de vento. Um vento entra com velocidade $v_1 = 20m/s$ na rua principal, de largura 25m, e uma parte é desviada numa ruela de 8m de largura. Se o vento sai na outra extremidade da rua principal com velocidade $v_2 = 19m/s$, com que velocidade v_3 sopra o vento na ruela?



O ar, neste problema pode ser considerado incompressível (A discussão sôbre a questão da compressibilidade é feita no capítulo seguinte). Portanto a vazão deve ser constante

$$A_1 v_1 = A_1 v_2 + A_3 v_3.$$

A velocidade na ruela deve ser

$$v_3 = \frac{A_1}{A_2}(v_1 - v_2) = 3,125m/s.$$

Problemas

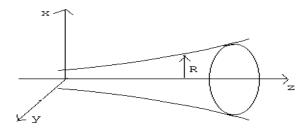
1. A velocidade de escoamento bi-dimensional (no plano (x, y)) e estacionário de um fluido incompressível é, na região x > 0; $0 \le y \le \ell$ da forma

$$(v_x, v_y, v_z) \equiv (xy, v_y, 0); \quad v_y(x, y = \ell) = 0.$$

- (a) Como deve ser v_y ?
- (b) Determine a família de curvas que representam as linhas de corrente.
- 2. Um tubo tem seção transversal circular, não constante, como mostra a figura. O raio da seção é dada por $R=R_0(1+z/\ell)^2$. Um fluido não compressível escoa pelo tubo e a componente z da velocidade é

$$v_z = v_0 (1 + z/\ell)^{-4}$$
.

Assumindo que há simetria cilíndrica (nenhuma grandeza física depende da variável azimutal φ) e que $v_{\varphi} \equiv 0$, determine $v_r(r,z)$



- 3. Um gás é expelido continuamente por um tubo de seção transversal não uniforme, em regime estacionário. A densidade não é necessàriamente constante.
 - (a) Escreva a equação de continuidade.
 - (b) Mostre que ρvA é constante ao longo do tubo. ρ é a densidade, v a velocidade e A a área da seção transversal.
- 4. O volume específico \mathcal{V} é o volume de uma unidade de massa. ($\mathcal{V}=1/\rho$). Escreva a equação de continuidade em termos de \mathcal{V} e velocidade \vec{v} .
- 5. Considere um escoamento isotérmico de um gás ideal, isto é, em que vale a relação $PV = P\rho^{-1} = RT/\mu = constante$. R é a constante dos gases ideais e μ é a massa molecular média do gás. Escreva a equação de continuidade em termos de P e velocidade \vec{v} .

Capítulo 3

Transporte de momento linear. Equações de Navier-Stokes e de Euler

A equação de conservação do momento linear tem uma importância especial para determinar o campo de velocidades.

Conservação de momento linear significa que o momento só pode ser modificado por forças. Tomando um volume de controle V_0 e o seu contorno S_0 a equação (2-2) pode ser reescrita para a componente cartesiana i do momento linear, na forma integral, fazendo $\gamma \equiv \rho v_i$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} dV \rho v_i = -\int_{S_0} d\vec{S} \cdot (\rho v_i \vec{v}) + \int_{V_0} dV q_{\rho v_i}.$$

A variação do momento contido em um volume fixo V_0 é devida, em parte, ao fluxo do momento através da borda, resultante do movimento do fluido e, em parte devida a forças externas.

 $q_{\rho v_i}$ representa a densidade de força que atua sôbre cada elemento do fluido.

A equação correspondente, na forma diferencial, provém diretamente de (2-4):

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_i \vec{v}) = q_{\rho v_i}. \tag{3-1}$$

Parte das forças externas deriva de potencial; uma outra parte resulta da interação do fluido em V_0 com a sua vizinhança.

É complicado escrever uma expressão para a força sôbre o fluido contido em V_0 (fixo) porque a quantidade do fluido pode variar.

Vamos portanto aplicar a equação de Newton para o movimento de uma quantia <u>fixa</u> do fluido, para obter as equações do momento nas formas diferencial e integral.

Considere uma quantia fixa do fluido que ocupa um volume V(t), no instante t. V(t) se move junto com o fluido e é limitado pelo contorno S(t). A massa dentro de S(t) é constante mas o momento linear não. Podemos escrever

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} dV \rho v_i(\vec{r}, t) = F_i.$$

Notação simplificada: $\rho v_i(\vec{r},t)$ significa que ρv_i depende de \vec{r} e t.

A integral de volume seria o momento linear da quantia fixa de massa e portanto o primeiro membro da equação representa a variação do seu momento linear.

Pela lei de Newton esta grandeza é igual a soma de todas as forças externas sôbre esta massa

$$F_i = \int_{V(t)} dV q_{\rho v_i}.$$

Para obter a equação fundamental da hidrodinâmica, vamos desenvolver o 10. membro desta equação, usando o teorema de Leibnitz:

Teorema 3.1 (de Leibnitz)

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} dV \rho v_i(\vec{r}, t) = \int_{V(t)} dV \frac{\partial \rho v_i(\vec{r}, t)}{\partial t} + \int_{S(t)} d\vec{S} \cdot \vec{v} \rho v_i(\vec{r}, t).$$

Demonstração:

$$\begin{split} \frac{D}{Dt} \int_{V(t)} dV \rho v_i(\vec{r}, t) & \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{V(t+\Delta t)} dV \rho v_i(\vec{r}, t + \Delta t) - \int_{V(t)} dV \rho v_i(\vec{r}, t) \right\} \\ & = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{V(t)} dV \left[\rho v_i(\vec{r}, t + \Delta t) - \rho v_i(\vec{r}, t) \right] + \int_{\delta V} dV \rho v_i(\vec{r}, t + \Delta t) \right\} \\ & = \int_{V(t)} dV \frac{\partial \rho v_i(\vec{r}, t)}{\partial t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{\delta V} dV \rho v_i(\vec{r}, t + \Delta t) \end{split}$$

Durante o intervalo de tempo Δt o ponto na superfície se desloca com velocidade do fluido \vec{v} ; $\delta \vec{r} = \vec{v} \Delta t$ e portanto a variação de volume será

$$V(t+\Delta t) - V(t) \equiv \delta V = \int_{\delta V} dV = \int_{S(t)} d\vec{S} \cdot \vec{v} \Delta t$$

 \mathbf{e}

$$\int_{\delta V} dV f(\vec{r}, t) = \int_{S(t)} d\vec{S} \cdot \vec{v} \Delta t f(\vec{r}, t).$$

Substituindo na equação acima o resultado é imediato.

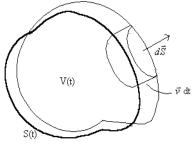


Figura 3.1

Pelo teorema, a variação do momento contido em V(t) é devida em parte à variação local de ρv_i e em parte devida ao fluxo através da borda, resultante do movimento do próprio contorno. C. q. d.

Observação: O teorema é válido não só para a função densidade de momento ρv_i mas para uma função escalar, vetorial ou tensorial qualquer $\gamma(\vec{r},t)$, bem comportada dentro de V(t), e que representa uma grandeza específica. E pode também ser generalizado para um volume V(t) que não se move com o fluido; a velocidade que apareceria na integral de superfície seria a velocidade de cada ponto do contôrno.

A equação de Newton fica, usando o teorema de Leibnitz e o de Gauss,

$$\int_{V(t)} dV \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \int_{S(t)} d\vec{S} \cdot \vec{v} \rho v_i =$$

$$\int_{V(t)} dV \left[\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} \rho v_i) \right] =$$

$$= F_i = \int_{V(t)} dV q_{\rho v_i}.$$

Podemos escrever a força como a soma de duas partes $F_i \equiv F_i^V + F_i^S$ onde

- F_i^V é a força volumétrica, que atua sôbre o volume devido a um campo e
- F_i^S é a força superficial que atua através da borda, devido ao próprio fluido ou à parede com que está em contacto.

A força volumétrica está, em geral, associada mais precisamente a matéria e não ao volume e portanto, é conveniente escrever em têrmos de $f_i^V \equiv dF_i^V/dm$, a força externa por unidade de massa. A força volumétrica fica

$$F_{i}^{V} = \int_{V(t)} dV \frac{dm}{dV} \frac{dF_{i}^{V}}{dm} = \int_{V(t)} dV \rho f_{i}^{V}.$$
 (3-2)

A gravidade é o exemplo mais importante de força de campo e corresponde a $\vec{f^V} = \vec{g}$.

A força superficial é mais complexa e será introduzida adiante.

A equação do momento linear fica

$$\int_{V(t)} dV \left[\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{v} \rho v_i) \right] = \int_{V(t)} dV \rho f_i^V + F_i^S.$$

Podemos reescrever a equação usando a notação vetorial como

$$\int_{V(t)} dV \left[\frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) \right] = \int_{V(t)} dV \rho \vec{f}^{V} + \overrightarrow{F}^{S}$$
 (3-3)

onde $\nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v})$ é um vetor cujo componente i é $\nabla \cdot (\rho \vec{v} v_i)$.

A matemática fica bastante simplificada se usarmos tensores.

 $\rho \vec{v} \vec{v}$ seria um tensor de ordem 2. O significado de $\rho \vec{v} v_i$ é de densidade de fluxo de momento linear na direção i e $\rho \vec{v} \vec{v}$ é o vetor densidade de fluxo de momento linear.

Tensores de 2a. ordem. A natureza tensorial de uma grandeza física é determinada pelo seu conteúdo físico. Os tensores de 2a. ordem, como os vetores (tensores de 1a. ordem) e os escalares (tensores de ordem 0) podem ser representados por componentes com relação a uma base de versores de um sistema de coordenadas. As componentes satisfazem certas regras de transformação numa rotação de coordenadas. A Física estabelece que uma grandeza é um tensor porque as componentes satisfazem certas regras de transformação na rotação de coordenadas e a Matemática diz que se uma grandeza for tensorial ela deve satisfazer estas e outras propriedades. Aqui usaremos diferentes notações para designar vetores:

$$ec{v} \equiv v_i ec{e_i} \equiv \left(egin{array}{c} v_1 \ v_2 \ v_3 \end{array}
ight).$$

Usaremos notações análogas para designar tensores de ordem 2:

$$\stackrel{\leftrightarrow}{T} \equiv \vec{e_i} T_{ij} \vec{e_j} \equiv \left(egin{array}{ccc} T_{11} & T_{12} & T_{13} \ T_{21} & T_{22} & T_{23} \ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{array}
ight)$$

 \vec{v} é uma forma simbólica de designar o vetor e não depende do sistema de coordenadas. Anàlogamente $\overset{\leftrightarrow}{T}$ é um símbolo que designa o tensor, independente do sistema de coordenadas.

A combinação de dois vetores \vec{ab} é chamada diade ou produto diádico.

Definimos produto escalar de um díade com um vetor \vec{v} (não comutativo) da seguinte forma:

$$\vec{v}\cdot(\vec{a}\vec{b})\equiv(\vec{v}\cdot\vec{a})\vec{b}\quad \mathrm{e}\quad(\vec{a}\vec{b})\cdot\vec{v}\equiv\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{v}).$$

Rotação do sistema de coordenadas.

Consideremos 2 sistemas de coordenadas cartesianas definidos pelos versores dos eixos $(\vec{e_i})$ e $(\vec{e_k})$, com a mesma origem, um obtido do outro por uma rotação. A relação entre os versores deve ser da forma

$$\vec{e_i} = \sum_{k=1}^{3} \vec{e_k'} a_{ki} \equiv \vec{e_k'} a_{ki},$$
 (3-4)

onde a_{ki} é um número para cada par de índices k e i. Portanto, a_{ki} pode ser considerado como elemento de uma matriz 3X3, chamada matriz de rotação e que designaremos por A.

Numa rotação, os versores se mantêm 3-ortogonais. Portanto

$$\vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = \delta_{i,j} = \vec{e_k'} a_{ki} \cdot \vec{e_\ell'} a_{\ell j} = \delta_{k,\ell} a_{ki} a_{\ell j} = a_{ki} a_{kj} \equiv {t \choose i} A_{ij}.$$

Notações:

- $\delta_{i,j}$ é o símbolo de Kornecker: $\delta_{i,j} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{i,j} = 1$ se i = j.
- tA é a matriz transposta de A, isto é, obtida de A trocando as linhas com as colunas $(({}^tA)_{ij} \equiv a_{ji})$. tAA é o produto linha por coluna ddas matrizes tA e A.

Da equação acima conclui-se que ${}^tAA=1$ (matriz unidade) e portanto ${}^tA=A^{-1}$.

Transformação das componentes de um vetor.

As componentes cartesianas de um vetor são diferentes para cada sistema de coordenadas e devem satisfazer a relação:

$$\vec{v} \equiv v_i \vec{e_i} = v_k' \vec{e_k'}.$$

Usando (3-4) obtém-se:

$$v_i \vec{e_i} = v_i \vec{e_k'} a_{ki} = v_k' \vec{e_k'}$$

e portanto a transformação das componentes cartesianas de \vec{v} por rotação é

$$v_k' = a_{ki}v_i; \qquad v_k' = \vec{v} \cdot \vec{e_k'}; \qquad v_i = \vec{v} \cdot \vec{e_i}. \tag{3-5}$$

Transformação das componentes de um tensor de 2a. ordem.

O tensor de 2a. ordem é caracterizado por 9 elementos e deve satisfazer a relação:

$$\stackrel{\leftrightarrow}{T} \equiv \vec{e_i} T_{ij} \vec{e_j} = \vec{e_k'} T'_{k\ell} \vec{e_\ell'}.$$

Usando (3-4) obtém-se:

$$\vec{e_i} T_{ij} \vec{e_j} = \vec{e_k'} a_{ki} T_{ij} \vec{e_\ell'} a_{\ell j}$$

e portanto a transformação das componentes cartesianas de $\stackrel{\smile}{T}$ por rotação deve ser

$$T'_{k\ell} = a_{ki} a_{\ell j} T_{ij}; \qquad T'_{k\ell} = \vec{e'_k} \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{T} \cdot \vec{e'_\ell}; \qquad T_{ij} = \vec{e_i} \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{T} \cdot \vec{e_j}. \tag{3-6}$$

Algumas propriedades importantes são:

1. Todo díade é um tensor.

 $2. \ \vec{a}\vec{b} \neq \vec{b}\vec{a}.$

Demonstração:

$$(\vec{a}\vec{b})_{ij} \equiv \vec{e_i} \cdot (\vec{a}\vec{b}) \cdot \vec{e_j} = a_i b_j \neq b_i a_j = (\vec{b}\vec{a})_{ij}.$$

Por exemplo: $\vec{ij} \neq \vec{ji}$ pois $\vec{i} \cdot (\vec{ij}) = \vec{j}$; $\vec{i} \cdot (\vec{ji}) = 0$.

3. $\overset{\leftrightarrow}{T} \cdot \vec{v}$ é um vetor, isto é, as sua componentes se transformam como um vetor ao se efetuar uma rotação do sistema de coordenadas.

$$\stackrel{\leftrightarrow}{T} \cdot \vec{v} \equiv \vec{e_i} T_{ij} \vec{e_j} \cdot v_k \vec{e_k} = T_{ij} \vec{e_i} v_k \delta_{jk} = \vec{e_i} T_{ij} v_j.$$

O produto escalar pode também ser obtido multiplicando as matrizes, linha por coluna

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}v_1 + T_{12}v_2 + T_{13}v_3 \\ T_{21}v_1 + T_{22}v_2 + T_{23}v_3 \\ T_{31}v_1 + T_{32}v_2 + T_{33}v_3 \end{pmatrix}$$

4. O tensor unitário $\stackrel{\leftrightarrow}{1}$ é definido por

$$\stackrel{\leftrightarrow}{1} \cdot \vec{a} \equiv \vec{a} \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{1} \equiv \vec{a},$$

qualquer que seja o vetor \vec{a} . Portanto

$$\stackrel{\leftrightarrow}{1} \equiv \delta_{ij}\vec{e_i}\vec{e_j}; \quad \left(\stackrel{\leftrightarrow}{1}\right)_{ij} = \delta_{ij}.$$

5. $\nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{T} \acute{e} \text{ um } \underline{\text{vetor}}. \ \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{T} = \partial_i (\vec{e_i} \cdot T_{jk} \vec{e_j} \vec{e_k}) = \partial_i (T_{ik} \vec{e_k}).$

6.
$$\nabla \cdot \left(\varphi \stackrel{\leftrightarrow}{1}\right) = \nabla \varphi$$
.

7. Todo tensor $\overset{\leftrightarrow}{T}$ pode ser escrito como a soma de um tensor simétrico $\overset{\leftrightarrow}{T^S}$ e um tensor assimétrico T^A :

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = T_{ij}^S + T_{ij}^A.$$

8. Teorema de Gauss

$$\int_{V_0} dV \nabla \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{T} = \int_{S_0} d\vec{S} \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{T} .$$

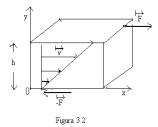
Demonstração:

$$\int_{V_0} dV \nabla \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{T} = \int_{V_0} dV \partial_i(T_{ik}) \vec{e_k} = \int_{V_0} dV [\nabla \cdot (\vec{e_i} T_{ik})] \vec{e_k} = \int_{S_0} d\vec{S} \cdot (\vec{e_i} T_{ik}) \vec{e_k} = \int_{S_0} d\vec{S} \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{T} \neq \int_{S_0} \stackrel{\leftrightarrow}{T} \cdot d\vec{S}.$$

3.1 Viscosidade. Fluido Newtoniano

Quando for possível considerar que camadas de fluido deslisam umas sobre outras o escoamento é chamado laminar. Nestes casos, surgem forças tangenciais (de cisalhamento) entre as camadas do fluido devido à viscosidade.

Considere 2 placas paralelas de área S afastadas por uma distância h, uma delas parada e a outra à velocidade v.



Entre um fluido viscoso e uma superfície sólida há sempre forças de coesão, de modo que a velocidade do fluido na superfície de contacto é a da superfície sólida. Portanto entre as placas a velocidade do fluido vai, gradativamente de zero a v. Para mantê-las neste movimento é preciso aplicar em cada uma das placas, uma força F, em sentidos contrários, de módulo

$$F = \eta \frac{v}{h} S.$$

Experimentalmente, verifica-se que, se h for pequeno e v também η não depende da velocidade ou do seu gradiente. η é chamado coeficiente de viscosidade.

De um modo genérico, a tensão de cisalhamento numa face paralela à direção de escoamento pode ser escrita

$$tens\~ao \ de \ cisalhamento = \lim_{S \to 0, h \to 0} F/S = \eta \frac{\partial v}{\partial n}$$
 (3-7)

onde n é a coordenada na direção normal às linhas de escoamento.

A equação (3-7) é conhecida como lei de viscosidade de Newton. O fluido que obedece esta lei é um fluido newtoniano.

Há uma relação mais geral entre as componentes de tensão superficial e o campo de velocidade, chamada **lei de Stokes** para a viscosidade, para fluidos newtonianos, definidos pelas seguintes características:

- No fluido parado as forças superficiais são normais às superficies e são chamadas forças de pressão.
- As forças superficiais dependem sòmente do estado termodinâmico e cinemático local.
- Há uma relação linear entre a tensão superficial e a deformação do fluido.

3.1.1Tensor de tensão.

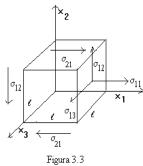
Definimos o tensor de tensões $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}$ da seguinte forma:

 σ_{ij} é a força que age sôbre a superfície $d\overrightarrow{S_i}$, normal ao eixo coordenado x_i ($x_i = constante$), na direção do eixo x_i , por unidade de área.

Portanto a força sôbre a superficie $d\overrightarrow{S_1}$ $(x_1 = \ell)$ do cubo mostrado na figura 3.3 seria

$$d\vec{F} \equiv dS_1 \left(\sigma_{11} \, \overrightarrow{e_1} + \sigma_{12} \, \overrightarrow{e_2} + \sigma_{13} \, \overrightarrow{e_3}\right)$$

$$\equiv dS_1 \, \overrightarrow{e_1} \cdot \sigma_{jk} \, \overrightarrow{e_j} \, \overrightarrow{e_k} \equiv d\overrightarrow{S_1} \cdot \stackrel{\leftarrow}{\sigma} .$$



 $dF_j = dS_1\sigma_{1j}$ seria a força na superfície $x_1 = \ell$, na direção \vec{j} . Esta força é exercida sôbre o cubo pela vizinhança, à direita do cubo. Uma força análoga é exercida pelo cubo, através da superfície $x_1 = 0$, sôbre o fluido contiguo. Pela lei da ação e reação, a força sôbre o cubo, na face $x_1 = 0$ tem sentido oposto a $d\vec{F}$. No limite $\ell \to 0$ as forças nas faces paralelas serão iguais e de sentidos opostos.

O têrmo de força superficial sôbre uma quantidade fixa do fluido, que aparece em (3-3), pode ser escrito

$$\overrightarrow{F}^{\vec{S}} = \int_{S(t)} d\vec{S} \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma} = \int_{V(t)} dV \nabla \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma} . \tag{3-8}$$

Algumas propriedades importantes de σ_{ij} são deduzidas a seguir.

Propriedade 1: $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}$ é simétrico, isto é $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

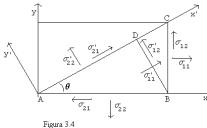
Demonstração:

Considere um elemento cúbico de fluido de lado ℓ (figura 3.3). σ_{12} e σ_{21} nas 4 faces perpendiculares ao eixo x_3 exercerão um momento de força igual a

$$(\sigma_{12} - \sigma_{21})\ell^3 = I\alpha$$

onde I é o momento de inércia do cubo e portanto $I \propto massa \times \ell^2 \propto \rho \ell^5$ e α é a aceleração angular. No limite $\ell \to 0$, α só não diverge se $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, c. q. d.

Considere agora um elemento de fluido na forma de um paralelogramo. A figura 3.4 mostra uma seção transversal de um tal paralelogramo.



A força que resulta das tensões superficiais é proporcional à área e portanto,

força
$$\propto d^2$$
,

onde d é uma dimensão linear típica da superfície considerada. Por outro lado, a força é a massa vezes a aceleração, pela lei de Newton. A massa seria ρd^3 e portanto

força
$$\propto \rho d^3 a$$
,

onde a é a aceleração. No limite $d \to 0$, a só não diverge se a força for nula.

Portanto, a força resultante sôbre o prisma ABC (metade do paralelogramo) devida às tensões superficiais deve ser zero.

Igualando as componentes da força resultante na direção do eixo x^\prime e do eixo y^\prime a zero obtemos

$$\sigma'_{21}AC - (\sigma_{21}\cos\theta + \sigma_{22}\sin\theta)AB + (\sigma_{11}\cos\theta + \sigma_{12}\sin\theta)BC = 0$$

 \mathbf{e}

$$\sigma'_{22}AC + (\sigma_{21}\operatorname{sen}\theta - \sigma_{22}\operatorname{cos}\theta)AB + (\sigma_{12}\operatorname{cos}\theta - \sigma_{11}\operatorname{sen}\theta)BC = 0.$$

Tomando o prisma ABD, e usando um raciocínio análogo obtemos

$$\sigma'_{21}AD - (\sigma_{21}\cos\theta + \sigma_{22}\sin\theta)AB + \sigma'_{11}BD = 0$$

 \mathbf{e}

$$\sigma'_{22}AD + (\sigma_{21}\mathrm{sen}\theta - \sigma_{22}\mathrm{cos}\theta)AB + \sigma'_{12}BD = 0.$$

Se
$$AC \equiv d \Rightarrow AB = d \cos \theta$$
; $BC = d \sin \theta$; $AD = d \cos^2 \theta$ e $BD = d \sin \theta \cos \theta$.

Sòmente 3 destas equações são independentes.

As 3 primeiras equações ficam

$$\sigma'_{21} - (\sigma_{21}\cos\theta + \sigma_{22}\sin\theta)\cos\theta + (\sigma_{11}\cos\theta + \sigma_{12}\sin\theta)\sin\theta = 0,$$

$$\sigma'_{22} + (\sigma_{21} sen\theta - \sigma_{22} cos\theta) cos\theta + (\sigma_{12} cos\theta - \sigma_{11} sen\theta) sen\theta = 0.$$

 \mathbf{e}

$$\sigma'_{21}\cos\theta - (\sigma_{21}\cos\theta + \sigma_{22}\sin\theta) + \sigma'_{11}\sin\theta = 0.$$

Estas equações relacionam as componentes σ_{ij} e σ'_{ij} relativas aos 2 sistemas de coordenadas, um obtido pela rotação do outro de um ângulo θ e são exatamente as regras de transformação de tensores por rotação do sistema de coordenadas, descritas para um tensor genérico T, pela equação (3-6).

 $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}$ é um tensor típico.

Destas equações podemos deduzir que

$$\sigma'_{21} = 2\sigma_{12} \cos 2\theta + \frac{1}{2}(\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin 2\theta$$

 \mathbf{e}

$$\sigma_{11}' + \sigma_{22}' = \sigma_{11} + \sigma_{22}.$$

Duas conclusões importantes são:

Propriedade 2: O traço de $\stackrel{\leftrightarrow}{\sigma}$ é invariante por rotação do sistema de coordenadas,

isto é,

$$\sigma'_{ii} = \sigma_{jj}$$

(obs: aqui σ' se refere a qualquer referencial obtido da rotação do referencial original) e o

Teorema 3.2 (Teorema de Pascal) A tensão em um fluido <u>em equilibrio mecânico</u> se reduz à pressão isotrópica P, normal à superfície.

Demonstração:

Não havendo escoamento as forças tangenciais são nulas. Nas expressões deduzidas acima, fazendo $\sigma_{12} = \sigma'_{12} = 0$ obtemos $\sigma_{11} = \sigma_{22} = P$, c. q. d.

A força exercida pela vizinhança através da pressão pode ser escrita, usando o teorema de Gauss generalizado, como

$$-\int_{S_0} dS \vec{n} P = -\int_{S_0} d\vec{S} P = -\int_{S_0} d\vec{S} \cdot (P\stackrel{\leftrightarrow}{1}) = -\int_{V_0} dV \nabla \cdot (P\stackrel{\leftrightarrow}{1}) = -\int_{V_0} dV \nabla P$$

onde \vec{n} é a normal à superfície, em cada ponto, dirigida para fora.

Explicitando o têrmo de pressão, podemos escrever o tensor das tensões como

$$\stackrel{\leftrightarrow}{\sigma} \equiv \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'} - P \stackrel{\leftrightarrow}{1} . \tag{3-9}$$

Observação para a mudança de notação: Daqui em diante vamos considerar um só sistema referencial. σ' será usado para designar um novo tensor definido pela expressão (3-9).

As tensões superficiais σ'_{ij} deformam (distorcem e comprimem ou expandem) um elemento do fluido.

Stokes relacionou a tensão de cisalhamento no fluido com deformação e a tensão normal com compressão e descompressão, numa lei conhecida com o seu nome.

3.1.2 Distorção de um elemento do fluido.

O escoamento de um fluido na vizinhança de um ponto P (em \vec{r}) pode ser considerado como composto de 3 movimentos:

- translação com velocidade igual à do ponto P;
- rotação rígida em torno de um eixo passando por P e
- movimentos de deformação de uma porção do fluido nesta vizinhança.

Consideremos o ponto P, fixo na posição \vec{r} . A velocidade na **posição** $\vec{r'}$, na **vizinhança de** \vec{r} pode ser escrita, desprezando termos de 2a. ordem em $\vec{r'}$, como

$$\vec{v}(\vec{r'} + \vec{r}) \simeq \vec{v}(\vec{r}) + \vec{r'} \cdot \nabla \vec{v}(\vec{r}).$$

$$\vec{r'} \cdot \nabla \vec{v}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{2} \left(\vec{r'} \cdot \nabla \vec{v}(\vec{r}) + \nabla \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{r'} \right) + \frac{1}{2} \left(\vec{r'} \cdot \nabla \vec{v}(\vec{r}) - \nabla \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{r'} \right). \tag{3-10}$$

Usando a identidade vetorial (Apêndice A)

$$\nabla(\vec{v}\cdot\vec{r'}) = \vec{v}\cdot\nabla\vec{r'} + \vec{r'}\cdot\nabla\vec{v} + \vec{v}\times(\nabla\times\vec{r'}) + \vec{r'}\times(\nabla\times\vec{v})$$

obtemos

$$(\nabla \vec{v}) \cdot \vec{r'} = 0 + \vec{r'} \cdot \nabla \vec{v} + 0 + 2\vec{r'} \times \vec{\zeta}, \text{ onde } \vec{\zeta} \equiv \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v}$$

pois ∇ atua sôbre \vec{r} e não sôbre $\vec{r'}$.

Substituindo em (3-10) obtemos

$$\vec{r'} \cdot \nabla \vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{r'} \cdot \nabla \vec{v} + \nabla \vec{v} \cdot \vec{r'}) - \vec{r'} \times \vec{\zeta}.$$

Definimos a função

$$\varphi(\vec{r'}) \equiv \frac{1}{2}\vec{r'} \cdot (\nabla \vec{v}) \cdot \vec{r'} = \frac{1}{2}x'_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} x'_j.$$

Na expressão foi usada a notação de Einstein para somatória. Tomando o gradiente em relação à variável $\vec{r'}$ obtém-se

$$\nabla'\varphi = \frac{1}{2}\vec{e}_{\ell}\frac{\partial}{\partial x'_{\ell}}\left(x'_{i}\frac{\partial v_{j}}{\partial x_{i}}x'_{j}\right) = \frac{1}{2}\vec{e}_{\ell}\left(\frac{\partial v_{j}}{\partial x_{\ell}}x'_{j} + x'_{i}\frac{\partial v_{\ell}}{\partial x_{i}}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{r'}\cdot\nabla\vec{v} + \nabla\vec{v}\cdot\vec{r'}\right).$$

 $\vec{e_{\ell}}$ é o versor na direção do eixo x_{ℓ} . Juntando os têrmos, a velocidade na vizinhança de \vec{r} é escrita como uma soma de 3 têrmos:

$$\vec{v}(\vec{r'} + \vec{r}) \simeq \vec{v}(\vec{r}) + \nabla'\varphi + \vec{\zeta} \times \vec{r'}. \tag{3-11}$$

 $\vec{v}(\vec{r})$ é a **velocidade de translação**, igual para todos os pontos da vizinhança (independente de $\vec{r'}$).

 $\vec{\zeta} \times \vec{r'}$ é a **velocidade de rotação** com velocidade angular $\vec{\zeta}$ em torno do ponto P.

 $abla' \varphi \equiv \frac{1}{2} (\vec{r'} \cdot \nabla \vec{v} + \nabla \vec{v} \cdot \vec{r'})$ não representa translação pois varia de ponto para ponto e é nulo no ponto P; não representa rotação pois $\oint_C \nabla' \varphi \cdot d\vec{r'} \equiv 0$, para qualquer curva C em torno do ponto P. Não há circulação. Portanto está relacionado com a **deformação** do elemento de fluido.

Compressão e expansão

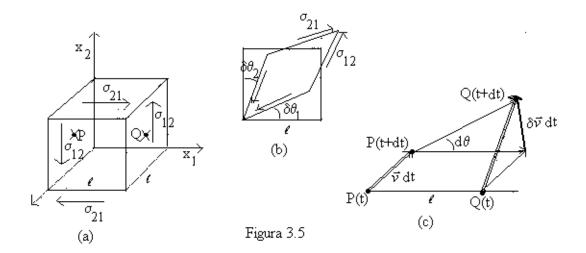
A equação de continuidade (2-3') pode ser escrita em termos do volume por unidade de massa $\mathcal{V} \equiv \rho^{-1}$.

A equação fica

$$\frac{1}{\mathcal{V}}\frac{D\mathcal{V}}{Dt} = \nabla \cdot \vec{v}. \tag{3-12}$$

A razão de variação de volume é dada pelo divergente da velocidade.

3.1.3 Lei de Stokes: relação entre a tensão e a deformação



A figura mostra dois pontos P e Q no centro de duas faces opostas de um cubo dentro do fluido. As forças que agem em P e Q formam um binário e portanto exercem um momento de força (ou torque) por unidade de área igual a $\sigma_{12}\ell$. O mesmo acontece com $\sigma_{21}\ell$. Este conjunto de forças vai deformar o cubo. Durante o intervalo de tempo dt o ponto P desloca de $\vec{v}(\vec{r},t)dt$. O ponto Q desloca com velocidade diferente $\vec{v}(\vec{r}+\ell \overrightarrow{e_1},t)$. Usando a fórmula derivada na seção anterior (sem rotação) obtemos a diferença de velocidade nos pontos P e Q que vai deformar o fluido como sendo

$$\delta \vec{v} \equiv \frac{1}{2} (\vec{r'} \cdot \nabla \vec{v} + \nabla \vec{v} \cdot \vec{r'}) \equiv \frac{1}{2} \left(\ell \frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial x_1} + (\nabla v_1) \, \ell \right)$$

A figura 3.5(c) mostra as novas posições dos pontos $P(t + \delta t)$ e $P(t + \delta t)$ e o ângulo $d\theta$ de deformação (descontada a rotação). A razão de deformação será, portanto

$$\frac{d\theta}{dt} \approx \frac{\delta v_2}{\ell} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right).$$

Stokes considerou que, uma relação aproximada, entre a tensão de cisalhamento e a deformação seria $\sigma'_{12} = \eta \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$.

Admitindo-se a isotropia no fluido teríamos

$$\sigma'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$
 para $i \neq j$.

Esta relação pode ser obtida de uma forma mais intuitiva, assumindo que, σ'_{ij} é uma combinação linear de $\partial v_i/\partial x_j$ e $\partial v_j/\partial x_i$, que se anula no caso de uma rotação uniforme $\vec{v} = \overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{r}$.

A tensão normal σ'_{11} faz mudar a distancia PQ, não só distorcendo mas comprimindo ou fazendo expandir o elemento de fluido. A dependência com o têrmo de distorção

$$\frac{\delta v_1}{\ell} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right)$$

não é necessariamente igual à dependência com a variação relativa do volume dada por $\nabla \cdot \vec{v}$ (3-12).

Portanto uma expressão mais geral para o tensor seria

$$\sigma'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + b \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}$$

onde b é uma constante. A forma equivalente, mais conveniente, é

$$\sigma'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \zeta \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}. \tag{3-13}$$

 η e ζ são os coeficientes de viscosidade.

Esta relação é conhecida como lei de Stokes.

O termo contendo η tem traço nulo.

Quando o fluido for incompressível $(\nabla \cdot \vec{v} = 0)$, só sobra êste têrmo. Êste têrmo corresponde à deformação sem variação de volume.

Quando o fluido for incompressível o traço de $\overset{\leftrightarrow}{\sigma'}$ é nulo. Usando (3-9) verificamos que

$$P = -\frac{1}{3}\sigma_{ii} \equiv -\frac{1}{3}(\text{Traço de } \overset{\leftrightarrow}{\sigma}).$$

É bom observar que, num fluido em movimento σ_{11} , σ_{22} e σ_{33} não são necessariamente iguais.

3.2 Equações de Navier-Stokes e de Euler.

Usando (3-8) em (3-3) obtemos

$$\int_{V(t)} dV \left[\frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) \right] = \int_{V(t)} dV \rho \overrightarrow{f^V} + \int_{V(t)} dV \nabla \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma}.$$

Esta equação é válida para qualquer volume V(t) e portanto a relação de igualdade deve valer para as funções integrandas, ou seja,

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}\vec{v}) = \rho \vec{f}^{\vec{V}} + \nabla \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma}. \qquad (\textbf{Equação de Navier-Stokes})$$
 (3-14)

Esta é a equação fundamental da hidrodinâmica, ou , a equação do momento linear e é conhecida pelo nome dos autores Navier e Stokes. Também aparece escrita como

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\Pi} = \rho \vec{f}^{\vec{V}}. \tag{3-14'}$$

 Π é o tensor densidade de fluxo de momento linear.

$$\overrightarrow{\Pi} \equiv \rho \overrightarrow{v} \overrightarrow{v} - \stackrel{\longleftrightarrow}{\sigma} \equiv \rho \overrightarrow{v} \overrightarrow{v} - \stackrel{\longleftrightarrow}{\sigma'} + P \stackrel{\longleftrightarrow}{1}$$

$$\sigma'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \zeta \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}.$$
(3-15)

A equação (3-14) pode ser reescrita, usando a equação de continuidade (2-3) e as relações vetoriais

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} &= (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2, \\ \frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} &= \rho \frac{\partial (\vec{v})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho)}{\partial t} \vec{v} \\ e &\nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) &= (\nabla \cdot (\rho \vec{v})) \vec{v} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \end{aligned}$$

como

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{v}\vec{v}) =$$

$$\rho \left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} =$$

$$\rho \left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2}\nabla v^{2} \right) = \rho \overrightarrow{f^{V}} - \nabla P + \nabla \cdot \overrightarrow{\sigma'}$$
(3-14")

onde $\nabla \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'} = \eta \nabla^2 \vec{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta\right) \nabla (\nabla \cdot \vec{v}).$ Na forma integral a equação fica

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} dV \rho \vec{v} = \int_{V_0} dV \rho \vec{f}^{\vec{V}} - \int_{S_0} d\vec{S} \cdot \overrightarrow{\Pi}
= \int_{V_0} dV \rho \vec{f}^{\vec{V}} + \int_{S_0} d\vec{S} \cdot \left(\overrightarrow{\sigma'} - \rho \vec{v} \vec{v} \right) - \int_{S_0} d\vec{S} P
= \int_{V_0} dV \rho \vec{f}^{\vec{V}} + \int_{S_0} \left(d\vec{S} \cdot \eta \nabla \vec{v} + d\vec{S} \left(\frac{\eta}{3} + \zeta \right) \nabla \cdot \vec{v} - d\vec{S} \cdot \rho \vec{v} \vec{v} - d\vec{S} P \right).$$
(3-16)

Fluido incompressível ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$).

Se $\nabla \cdot \vec{v} \equiv \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$, o tensor de cisalhamento fica $\sigma'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ e, portanto

$$\nabla \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'} = \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma'_{ik} \overrightarrow{e_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \overrightarrow{e_k} = \eta \nabla (\nabla \cdot \overrightarrow{v}) + \eta \nabla^2 \overrightarrow{v} = \eta \nabla^2 \overrightarrow{v}.$$

A equação (3-14"), fica

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla P + \eta \nabla^2 \vec{v} + \rho \overrightarrow{f^V},$$

que pode ser escrita

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v} + \overrightarrow{f^V}. \tag{3-17}$$

onde $\nu \equiv \eta/\rho$ é conhecido como viscosidade cinemática. A equação depende de um único coeficiente de viscosidade.

A forma integral da equação é

$$\frac{d}{dt} \int_{V_0} dV \overrightarrow{J} = \int_{V_0} dV \rho \overrightarrow{f^V} - \int_{S_0} d\overrightarrow{S} \cdot \rho \overrightarrow{v} \overrightarrow{v} - \int_{S_0} d\overrightarrow{S} P + \eta \int_{S_0} d\overrightarrow{S} \cdot \nabla \overrightarrow{v}.$$
 (3-18)

onde $\overrightarrow{J} \equiv \rho \overrightarrow{v}$.

Do ponto de vista cinemático, o que caracteriza o escoamento é ν , conforme será visto na seção (3.6). Alguns valores de η e ν a 15 0C e a 1 atm são mostrados na tabela:

	$\eta(\mathrm{g/s~cm})$	$\nu(\mathrm{cm}^2/s)$
ar	0.000178	0.145
água	0.0114	0.0114
mercúrio	0.0158	0.00116
óleo de oliva	0.99	1.08

A viscosidade cinemática do óleo de oliva é muito mais alta que do ar e a do ar, muito mais alta que da água ou mercúrio. Isto significa que a viscosidade do ar é considerável em certas situações.

A viscosidade é altamente dependente da temperatura.

A velocidade de escoamento é obtida resolvendo-se a equação de Navier-Stokes com certas condições de contorno.

A equação para um fluido homogêneo, incompressível e não viscoso é chamada **equação de Euler**. Ela é também, válida para fluidos compressíveis e é

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}\right) = \rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2}\nabla v^2\right) = -\nabla P + \rho \overrightarrow{f^V}.$$
 (3-19)

(Equação de Euler)

3.3 Condições de contorno

Fluido-sólido

A velocidade do fluido, normal à superfície de separação seria igual à do sólido pois não há interpenetração de matéria:

$$\overrightarrow{v_F} \cdot \overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_S} \cdot \overrightarrow{n}. \tag{3-20}$$

O índice F se refere a fluido e S a sólido.

Se a viscosidade do fluido fosse nula, a velocidade tangencial poderia ter qualquer valor.

Entre um fluido viscoso e uma superfície sólida há forças de coesão, de modo que a velocidade tangencial do fluido na interface também é a mesma que a da superfície sólida. Portanto

$$\overrightarrow{v_F} = \overrightarrow{v_S}. \tag{3-21}$$

A força superficial que age sôbre o fluido é $-\int_{S_0} d\overrightarrow{S} P + \int_{S_0} d\overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{\sigma'}$, onde $d\overrightarrow{S}$ é dirigido para fora do fluido. Portanto a força que o fluido exerce sôbre o sólido é

$$\overrightarrow{F} = + \int_{S_0} d\overrightarrow{S} P - \eta \int_{S_0} d\overrightarrow{S} \cdot \overrightarrow{\sigma'}$$
 (3-22)

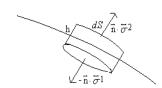
onde $d\overrightarrow{S}$ é dirigido para fora do fluido.

Fluido-fluido

Na interface entre dois fluidos $\underline{\tilde{nao}}$ miscíveis deve haver continuidade nos valores das velocidades:

$$\overrightarrow{v^1} = \overrightarrow{v^2}$$

Os índices 1 e 2 se referem a cada um dos fluidos. Considere, na superficie de separação de dois fluidos, um cilindro de eixo normal à superficie, com área de seção normal dS e altura h arbitrariamente pequena (formato de uma pílula). Aplicando a lei de Newton neste cilindro e o teorema de Gauss



$$\overline{\rho} \ dS \ h \ a \approx dV \nabla \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma} \approx dS \ \vec{n} \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma^2} - dS \ \vec{n} \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma^1},$$

onde $\overline{\rho}$ é a densidade média dentro do cilindro e a é a aceleração do cilindro.

No caso de fluidos incompressíveis seria

$$\overline{\rho} \ dS \ h \ a \approx dV \nabla \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma} \approx -dS \ \vec{n} \left(P^2 - P^1\right) + dS \ \vec{n} \cdot \left(\eta^2 \nabla \overrightarrow{v^2} - \eta^1 \nabla \overrightarrow{v^1}\right).$$

A força na superficie lateral se torna desprezivel quando $h \to 0$. No limite $h \to 0$, o segundo membro da igualdade deve ser zero para que a aceleração não se torne infinita.

Portanto, a força superficial deve ser a mesma nos dois lados da superficie:

$$\vec{n} \cdot \left(\stackrel{\leftrightarrow}{\sigma^2} - \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma^1} \right) = -\vec{n}(P^2 - P^1) + \vec{n} \cdot \left(\stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'^2} - \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'^1} \right) = 0 \tag{3-24}$$

no caso geral e

$$-\vec{n}(P^2 - P^1) + \vec{n} \cdot \left(\eta^2 \nabla \overrightarrow{v^2} - \eta^1 \nabla \overrightarrow{v^1}\right) = 0 \tag{3-25}$$

para dois fluidos incompressíveis.

3.4 Escoamentos laminares unidirecionais

Vamos analisar alguns problemas simples de escoamentos viscosos laminares. Em geral, o têrmo laminar é usado para designar fluidos não turbulentos. Aqui é usado no sentido mais restrito de escoamento em que se formam lâminas de fluido com mesma velocidade, de espessura uniforme e bordas fixas.

3.4.1 Escoamentos incompressíveis retilineos

Escoamento em uma direção x significa $\vec{v} = v_x \vec{i}$.

Nesse caso, as equações do movimento podem ser resolvidas de forma relativamente simples. Da equação de continuidade para um fluido incompressível $(\nabla \cdot \vec{v} = 0)$ obtemos

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_x = v_x(y, z, t).$$

Tomemos o eixo y na vertical, para cima.

Considerando como força externa sòmente a gravidade, a equação de Navier-Stokes (3-17) fica

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v} - g\vec{j}.$$

Por outro lado, como

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}\right) \vec{i} = \frac{\partial v_x}{\partial t} \vec{i},$$

nas direções cartesianas, obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \nabla^2 v_x, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - g & e \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}. \end{cases}$$

• Da última equação concluimos que P é independente de z.

• Da 2a. equação segue que

$$P = -\rho gy - \rho \alpha,$$

onde α é constante de integração, independente de y e z; pode ser função de x e/ou t.

• A 1a. equação fica

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}.$$

O 10. membro da equação, independente de x, é igual ao 20. membro que independe de y e z. Portanto, cada um dos membros deve ser independente de x, y e z, ou seja, só depende de t.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \beta(t) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta(t)x - \frac{P_0(t)}{\rho}.$$

 $P_0(t)$ é a constante de integração em x.

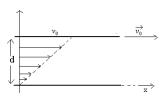
O escoamento deve satisfazer as equações

$$P = -\rho gy - \rho \beta(t)x + P_0(t);$$
 $\beta(t) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}$ e

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \beta(t).$$

A equação da velocidade é do mesmo tipo que a da difusão de calor no plano yz.

Exemplo 3.1 (Escoamento de Couette) \acute{E} o escoamento estacionário (grandezas físicas não variam com t), à pressão constante, entre duas placas paralelas, infinitas, uma parada e a outra puxada com velocidade constante v_0 . Assume-se que a distancia d entre as placas é pequena, de modo que o efeito da gravidade não vai ser relevante e a pressão pode ser considerada uniforme.



O problema tem uma simetria por translação na direção do eixo z. Tal translação equivaleria a mudar de variavel: $z \to z + \ell$; as condições de contorno e a equação diferencial para v_x permanecem inalteradas. Devido à esta simetria v_x não vai depender de z e a equação vai ser

$$-\nu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = 0.$$

A solução desta equação que satisfaz as condições de contorno

$$v_x(0) = 0 \quad e \quad v_x(d) = v_0$$

 \acute{e}

$$v_x = \frac{v_0}{d}y.$$

Para se manter o movimento é preciso fixar a placa inferior e aplicar na placa superior uma força, em cada elemento de superfície, dada por

$$d\vec{F} = d\overrightarrow{S} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma'} - d\overrightarrow{S}P.$$

Ignorando a componente normal e fazendo d $\overrightarrow{S} = dx dz \overrightarrow{j}$ ficamos com

$$d\vec{F}_t = dx \ dz \ \left(\sigma'_{yx}\vec{i} + \sigma'_{yy}\vec{j} + \sigma'_{yz}\vec{k}\right) = dx \ dz \ \sigma'_{yx}\vec{i} = dx \ dz \ \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\vec{i} = dx \ dz \ \eta \frac{dv_x}{dy}\vec{i}.$$

Portanto a força por unidade de superf'icie deve ser

$$\eta \frac{dv_x}{dy} = \frac{v_0}{d}.$$

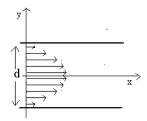
Exemplo 3.2 Escoamento estacionario entre 2 placas paralelas paradas

Consideremos as placas infinitas separadas por uma distancia d, em $y=\pm d/2$. O escoamento é mantido por um gradiente constante de pressão

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{dx} = -\rho\beta.$$

 $Devido à simetria a equação de <math>v_x$ vai ser

$$-\nu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = \beta = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx}.$$



A solução desta equação que satisfaz as condições de contorno

$$v_x(\frac{d}{2}) = v_x(-\frac{d}{2}) = 0$$

 \acute{e}

$$v_x = \left(-\frac{dP}{dx}\right) \frac{1}{2\eta} \left(\frac{d^2}{4} - y^2\right).$$

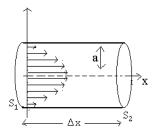
A pressão vai diminuindo ao longo do escoamento.

Exemplo 3.3 (Escoamento de Poiseuille) É o escoamento laminar de um fluido, dentro de um tubo infinito de seção circular de raio a. O escoamento, para ser mantido estacionário, requer um gradiente constante de pressão

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{dP}{dx} = -\rho\beta.$$

A equação de v_x vai ser

$$-\nu \nabla^2 v_x = \beta = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx}.$$



Devido à simetria axial do problema, é conveniente usar coordenadas cilíndricas r, φ, x .

Como

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

obtemos

$$\eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dv_x}{dr} = \frac{dP}{dx}.$$

 v_x é a solução regular desta equação que satisfaz a condição

$$v_x(a) = 0.$$

Portanto

$$v_x = \frac{1}{4n} \frac{dP}{dx} \left(r^2 - a^2 \right).$$

O perfil da velocidade é uma parábola

O fluxo (através de uma seção transversal $d\vec{S} = rdrd\varphi \vec{i}$) é obtido calculando a integral:

$$Q = \int \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

$$= \int_0^a r dr \rho v_x \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{\rho \pi}{2\eta} \frac{dP}{dx} \int_0^a r dr \left(r^2 - a^2\right)$$

$$= -\frac{\rho \pi}{8\eta} \frac{dP}{dx} a^4.$$

Esta expressão é conhecida como **fórmula de Poiseuille** ou **Hagen-Poiseuille**. O fluxo é proporcional ao gradiente da pressão, o que é intuitivo. Para um gradiente fixo de pressão, o fluxo é inversamente proporcional ao coeficiente de viscosidade.

O tubo é puxado pela correnteza por uma força. A força sôbre um pedaço de cilindro de altura Δx e seções transversais S_2 e S_1 vale

$$\vec{F} = -\int_{V} dV \left(\nabla \cdot \sigma' - \nabla P \right)$$

$$= \int_{S_{\ell}} \left(-d\vec{S} \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'} + d\vec{S}P \right) + \int_{S_{2}} \left(-d\vec{S} \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'} + d\vec{S}P \right) + \int_{S_{1}} \left(-d\vec{S} \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'} + d\vec{S}P \right),$$

onde S_{ℓ} é a superficie lateral do cilindro.

 $\vec{v} = v_x \vec{i}$ não depende de x, portanto é a mesma nas superficies S_1 e S_2 . Consequentemente σ' é igual em S_1 e S_2 . Portanto, das integrais nas superficies S_1 e S_2 só sobram as forças devidas à diferença de pressão:

$$\int_{S_2} d\vec{S} P - \int_{S_1} d\vec{S} P = \int r \ dr \ d\varphi \ \vec{i} \left(P_2 - P_1 \right) = \pi a^2 \left(\frac{dP}{dx} \Delta x \right) \vec{i}.$$

O fluido não é acelerado e portanto a força resultante deve ser nula. A força com que o tubo é puxado pela correnteza deve ser igual à força de pressão necessária para manter o escoamento, que é, por unidade de comprimento:

$$\pi a^2 \frac{dP}{dx} \vec{i}$$
.

A força do fluido no tubo pode ser calculada diretamente pela expressão

$$\vec{F} = -\int_{S_{\ell}} d\vec{S} \cdot \sigma'.$$

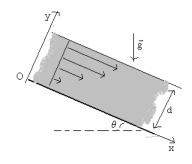
O elemento de área é na direção radial (versor $\vec{e_r}$): $d\vec{S} = dS\vec{e_r} = rd\varphi dx\vec{e_r}$.

O cálculo pode ser feito escrevendo todas as expressões em têrmos de coordenadas cartesianas ou em têrmos de coordenadas cilíndricas.

Exemplo 3.4 (Escoamento num canal aberto)

Suponha uma placa inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal, coberta por uma camada de espessura d de um fluido. A face livre do fluido está em contacto com a atmosfera, à pressão P_a . O fluido escorre em regime estacionário sob a ação da gravidade. As equações que descrevem o escoamento devem ser

$$P = -\rho g \cos \theta y - \rho \beta x + P_0; \qquad \beta = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} \qquad e$$



$$-\frac{\eta}{\rho}\frac{d^2v_x}{dy^2} = g\mathrm{sen}\theta - \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx}.$$

Para y = 0, a velocidade deve ser nula: $v_x(0) = 0$.

Na face livre, a força devida a tensão superficial deve ser a mesma nos dois lados e portanto

$$\left(\vec{n} \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma} \right)_{fluido} = \left(\vec{n} \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma} \right)_{atmosfera}.$$

Portanto, para y = d

$$\begin{split} \sigma_{yx} &= \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \eta \frac{dv_x}{dy} = 0; \\ \sigma_{yy} &= -P = -P_a \quad e \\ \sigma_{yz} &= 0. \end{split}$$

Aplicando a condição sôbre P temos

$$P_a = -\rho g \cos\theta d - \rho \beta x + P_0.$$

Esta relação só é válida se $\beta = 0$. A solução da equação da velocidade com as condições

$$v_x(0) = 0$$
 e $\frac{dv_x}{dy} = 0$

 \acute{e}

$$v_x(y) = rac{-
ho g}{\eta} sen heta \left(rac{y^2}{2} - dy
ight).$$

3.4.2 Escoamentos incompressíveis circulares

Consideremos um fluido em movimento horizontal circular em torno de um eixo infinito (vertical), isto é, $\vec{v} = v_{\varphi} \vec{e_{\varphi}}$, em coordenadas cilíndricas, onde $\vec{e_{\varphi}}$ é o versor na direção azimutal.

Da equação de continuidade para um fluido incompressível obtemos

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\varphi} = v_{\varphi}(r, z, t).$$

Considerando como força externa sòmente a gravidade, a equação de Navier-Stokes (3-17) fica

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v} - \vec{g}.$$

Por outro lado,

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial t} \overrightarrow{e_{\varphi}} - \frac{v_{\varphi}^2}{r} \overrightarrow{e_r}$$

e

$$\nabla^2 \left(v_\varphi \overrightarrow{e_\varphi} \right) = + \left(\nabla^2 v_\varphi - \frac{1}{r^2} v_\varphi \right) \overrightarrow{e_\varphi}.$$

Vamos discutir o caso em que o efeito da gravidade não é importante.

A equação de Navier-Stokes fica:

$$\frac{-\frac{v_{\varphi}^{2}}{r}}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}$$

$$\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \nu \left(\nabla^{2} v_{\varphi} - \frac{1}{r^{2}} v_{\varphi}\right)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}.$$

- Da última equação segue que P é independente de z.
- A 2a. equação fica

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} - \nu \left(\nabla^2 v_\varphi - \frac{1}{r^2} v_\varphi \right) = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \equiv \frac{1}{r} \beta.$$

Como o 10. membro não depende de φ , β deve ser independente de φ e podemos escrever

$$P = -\rho\beta\varphi - \rho\gamma(r, t).$$

- Usando esta expressão na 1a. equação, concluimos que
 - $-\beta$ não pode depender de r: $\beta \equiv \beta(t)$ e
 - $-v_{\varphi}$ não pode depender de z: $v_{\varphi} \equiv v_{\varphi}(r,t)$.

Exemplo 3.5 (Escoamento circular de Couette) Um cilindro infinito de raio a está encaixado dentro de um tubo ôco, concêntrico, de raio b, b > a. No vão há um fluido viscoso. O cilindro interno está parado e o tubo externo está em movimento de rotação constante (velocidade angular ω). Em regime estacionário, o sistema apresenta simetria azimutal e $\partial P/\partial \varphi = 0$.

A velocidade de escoamento satisfaz a

$$-\nu\left(\nabla^2 v_\varphi - \frac{1}{r^2}v_\varphi\right) = 0 \quad \Rightarrow \frac{d^2 v_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_\varphi}{dr} - \frac{v_\varphi}{r^2} = 0$$

e a pressão por

$$-\frac{v_{\varphi}^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr}.$$

Pode-se verificar que a solução geral da equação da velocidade é

$$v_{\varphi} = \frac{c_1}{r} + c_2 r,$$

onde c_1 e c_2 são constantes.

As condições de contorno devem ser

$$v_{\varphi}(a) = 0$$
 e $v_{\varphi}(b) = \Omega b$.

Portanto a solução fica

$$v_{\varphi} = \Omega b \frac{\frac{r}{a} - \frac{a}{r}}{\frac{b}{a} - \frac{a}{k}}.$$

A pressão é obtida com uma simples integração.

O movimento é mantido por um torque.

3.5 Atmosfera terrestre

No campo gravitacional terrestre, num referencial inercial, a força volumétrica por unidade de massa \vec{f}^V seria simplesmente \vec{g} .

No campo gravitacional terrestre, num referencial que gira com a Terra $\underline{\text{(n\~{a}o inercial)}}$ seria \vec{g} somada à força centrífuga e a de Coriolis (1-9)

$$\vec{f^V} = \vec{g} + \Omega^2 \vec{r_\perp} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v_\Omega} \equiv \vec{g}_{ef} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v_\Omega}.$$

O têrmo de Coriolis é dado por (1-10)

$$-2\vec{\Omega} \times \overrightarrow{v_{\Omega}} = (2\Omega \text{ sen } \lambda \ v_y - 2\Omega \cos \lambda v_z) \ \vec{i} - 2\Omega \text{ sen } \lambda \ v_x \vec{j} + 2\Omega \cos \lambda \ v_x \vec{k},$$

onde λ é a latitude, contada positivamente para o norte; \vec{j} é o versor nesta direção e \vec{k} é o versor na vertical, para cima.

O índice Ω em $\overrightarrow{v_{\Omega}}$ será omitido; a velocidade \overrightarrow{v} se referirá à velocidade medida no referencial da superfície terrestre.

Na atmosfera, em geral, o movimento é horizontal e portanto

$$2\Omega \operatorname{sen} \lambda v_y \gg 2\Omega \cos \lambda v_z$$
.

Como
$$\Omega = 2\pi/1 \text{ dia} = 2\pi/(86400s) \approx 10^{-4} s^{-1} \text{ e } v \text{ \'e} \lesssim 100 km/h \approx 30 m s^{-1}$$

 2Ω cos $\lambda \; v_x \ll g$ e outros têrmos na equação de Navier-Stokes, na vertical.

Com estas aproximações a componente predominante da força de Coriolis é a devida à componente vertical local da velocidade angular de rotação da Terra. Assim,

$$\overrightarrow{f}_{Coriolis} \approx -2 \overrightarrow{\Omega}_{vert} \times \overrightarrow{v}, \quad \overrightarrow{\Omega}_{vert} = \Omega \text{ sen } \lambda \overrightarrow{e_z}.$$

A equação de Navier-Stokes fica

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v_x \right) = \frac{Dv_x}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma'_{kx}}{\partial x_k} + 2\Omega \operatorname{sen} \lambda v_y$$

$$\left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v_y \right) = \frac{Dv_y}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma'_{ky}}{\partial x_k} - 2\Omega \operatorname{sen} \lambda v_x$$

$$\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v_z \right) = \frac{Dv_z}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma'_{kz}}{\partial x_k} + g_{ef}$$

ou

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'} + \overrightarrow{g}_{ef} - 2 \overrightarrow{\Omega}_{vert} \times \vec{v}, \qquad (3-26)$$

$$\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'} = \nu \nabla^2 \vec{v} + \nu \left(\frac{1}{3} + \frac{\zeta}{\eta} \right) \nabla (\nabla \cdot \vec{v}).$$

 $f \equiv 2\Omega$ sen λ é chamado de **parâmetro de Coriolis**.

3.6 Equações adimensionais de Navier-Stokes

Num problema de escoamento queremos determinar certas variáveis (velocidade, pressão...) em têrmos de outras variáveis (independentes), resolvendo as equações de conservação de massa

(continuidade), de momento linear (de Navier-Stokes), de energia e outras relacionadas aos processos termodinâmicos envolvidos, observando as condições iniciais e as de contôrno.

Há um princípio da escala que diz que as equações e as condições iniciais e de contôrno podem ser escritas em têrmos de variáveis adimensionais, e as soluções podem depender de todas as constantes adimensionais formadas com os parâmetros característicos do problema.

Isto provém do fato de que leis físicas não podem depender de escolhas de sistemas de unidades.

Se o problema contiver, por exemplo, um comprimento característico ℓ_0 , o vetor de posição \vec{r} pode ser dividido por ℓ_0 para formar a nova variável independente, adimensional $\vec{r'} \equiv \vec{r}/\ell_0$.

A escala de comprimento relevante é, em geral, bastante óbvio.

Por exemplo, o raio de um tubo cilíndrico dentro do qual escoa um líquido, ou o raio de uma esfera imersa num fluido.

Às vezes não é tão evidente.

As vezes há várias opções de escolha de escala.

Exemplo 3.6 (Esfera imersa num fluido) Considere um líquido uniforme, que escoa com velocidade v_0 e encontra uma esfera sólida de raio a. Em coordenadas polares esféricas (r, θ, φ) , as componentes da velocidade não nulas são v_r e v_θ , se houver simetria azimutal. Cada uma delas, depende das variáveis

$$r, \theta, t, \nu, v_0 \quad e \quad a.$$

Duas grandezas características dêste escoamento são v_0 e a; estas podem ser consideradas escalas fundamentais do sistema. Podemos escrever todas as variaveis numa forma adimensional, usando unidades formadas com estas grandezas. As unidades de velocidade e de comprimento seriam v_0 e a, respectivamente, e portanto a velocidade e o comprimento adimensionais ficariam

$$(v'_r, v'_{\varphi}) \equiv \left(\frac{v_r}{v_0}, \frac{v_{\varphi}}{v_0}\right) \quad e \quad r' \equiv \frac{r}{a}.$$

Uma escolha óbvia para a unidade de tempo seria

$$t_0 \equiv \frac{a}{v_0} \quad \Rightarrow \quad t' \equiv \frac{at}{v_0}.$$

A solução ainda deve depender da viscosidade, numa forma adimensional: $\nu' \equiv \nu/\nu_0$. A dimensão de ν é $[\nu] = L^2 T^{-1}$. Portanto devemos tomar

$$\begin{bmatrix} \frac{\nu}{\nu_0} \end{bmatrix} = 1;$$

$$[\nu_0] = [v_0^j a^k];$$

$$L^2 T^{-1} = (L T^{-1})^j L^k = L^{j+k} T^{-j}.$$

j=1 e k=1 é solução, ou seja, $\nu_0=v_0a$. O escoamento depende da constante adimensional

$$(\nu')^{-1} \equiv \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^{-1} \equiv \frac{v_0 a}{\nu} \equiv Re. \tag{3-27}$$

O número Re é chamado número de Reynolds e o seu valor determina o tipo de escoamento. Cada uma das componentes (v_r, v_θ) da velocidade são da forma

$$v' \equiv \frac{v}{v_0} = f(r', \theta, t', Re) \; ; \; r' \equiv \frac{r}{a}.$$

Conforme o regime de escoamento ainda pode haver uma dependencia com a velocidade do som (pressão e densidade).

Como $\ell_v \equiv \nu/v_0$ tem também dimensão de comprimento, uma outra escolha de escala poderia ser

$$\ell_v \equiv \frac{\nu}{v_0} \ e \ \tau_0 = \frac{a}{v_0} \ ou \ \tau_0 = \frac{\nu}{v_0^2}.$$

 ℓ_v é uma escala de comprimento relacionada à viscosidade e $Re \equiv a/\ell_v$.

Conforme o problema uma das opções deve ser mais apropriada.

3.6.1 Análise Dimensional.

Segundo o princípio da análise dimensional, as equações e todas as relações funcionais devem ser dimensionalmente homogêneas.

Um teorema importante sôbre análise dimensional é

Teorema 3.3 (Teorema π) Se uma variável depende de n parâmetros independentes, ela pode ser escrita numa forma adimensional como uma função de parâmetros adimensionais e

"número destes para $metros \underline{a}$ $dimensionais \underline{in}$ dependentes =

número original de parâmetros independentes

(-) número de grandezas dimensionalmente independentes."

Definição: Grandezas $\{A, B, C, D\}$ são ditas dimensionalmente independentes se não for possível combinar da forma $A^a B^b C^c D^d$, a, b, c e d números quaisquer, de modo a ser adimensional, isto é, $[A]^a [B]^b [C]^c [D]^d = 1$.

No contexto da dinâmica de fluidos, 4 grandezas dimensionalmente independentes são relevantes: massa, comprimento, tempo e temperatura. Ao invés destas, outras grandezas derivadas destas, de dimensões diferentes, podem ser mais significativas num problema. De qualquer forma, o número máximo é 4.

Corolário 3.1 Uma equação que representa uma lei física, envolvendo n parâmetros dimensionais ou não dos quais m são grandezas dimensionalmente independentes, pode ser numa forma adimensional em têrmos de n-m parâmetros <u>a</u>dimensionais.

No exemplo 3.6, o número original de parâmetros dimensionais é 6 $(r, \theta, t, \nu, v_0, a)$ e o número de grandezas dimensionalmente independentes é 2 (a, v_0) . Portanto, pelo teorema, v' deve depender de 4 parâmetros <u>in</u>dependentes <u>a</u>dimensionais: $v' = f(r', \theta, t', Re)$.

Exemplo 3.7 (Pêndulo Simples) O período T de um pêndulo simples deve depender, pelo menos em princípio, do comprimento (ℓ) , da massa (m) e da aceleração da gravidade (g) e portanto de 3 parâmetros independentes. Há 3 unidades dimensionais fundamentais: m, g e ℓ . Portanto o período na forma adimensional deve ser uma constante, independente de qualquer grandeza característica do pêndulo: $T/T_0 = C = constante$. T_0 seria a escala de tempo, obtida de uma combinação complexa de m, g. e ℓ .

$$T_0 = m^a g^b \ell^c.$$

$$[T_0] = M^a (LT^{-2})^b L^c$$

$$T^1 = M^a L^{b+c} T^{-2b}$$

e portanto a=0; b=-c e b=-1/2. A solução seria $T_0=\sqrt{\ell/g}$. O período seria

$$T = CT_0 = C\sqrt{\ell/g}$$

onde C deve ser um número adimensional, igual para todos os pêndulos.

Exemplo 3.8 (Pêndulo Físico) Considere um pêndulo construido com uma bola de massa m e raio R pendurado por um fio, de modo que a distancia do centro da esfera ao ponto de suspenão seja ℓ . O período T deve depender, pelo menos em princípio, do comprimento (ℓ), do raio R além da massa (m) e da aceleração da gravidade (g) e portanto de 4 parâmetros independentes. Há 3 unidades dimensionais fundamentais: m, g e ℓ . Portanto o período na forma adimensional deve depender de uma grandeza característica adimensional do pêndulo: $T/T_0 \neq constante$.

Uma forma de escrever ℓ , R, m e g de forma adimensional é tomar ℓ , m e $T_0 \equiv \sqrt{\ell/g}$ como grandezas dimensionalmente independentes relevantes e portanto as unidades de medida. R seria substituida por R/ℓ . Pode-se escrever então:

$$T/T_0 = f(R/\ell) \longrightarrow T = \sqrt{\frac{\ell}{g}} f(R/\ell).$$

A expressão exata é

$$T = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\ell}{g}} \sqrt{1 + \frac{2}{5} \left(\frac{R}{\ell}\right)^2}.$$

Quando são conhecidas as equações que governam o comportamento de um sistema a análise dimensional leva a estruturas especiais chamadas similares.

O sistema físico real chamamos de PROTÓTIPO.

3.6.2 Similaridade geométrica

Um modelo é dito geomètricamente similar a um protótipo se a razão entre uma dimensão qualquer do modelo e a dimensão correspondente do protótipo tem sempre o mesmo valor, chamado fator de escala. Às vezes há mais de um fator de escala.

3.6.3 Similaridade dinâmica

Quando o sistema físico é descrito por equações e condições iniciais e/ou de contorno estas podem ser escritas em têrmos de variáveis e constantes adimensionais. As constantes adimensionais, que aparecem como coeficientes nas equações, indicam a importância relativa do têrmo.

É preciso tomar um cuidado especial na escolha de grandezas características. Por exemplo, num fluido, a diferença de pressão é mais significativa que a pressão absoluta; a velocidade relativa é significativa mas não a velocidade absoluta.

Diz-se que dois processos são **dinamicamente similares** se forem descritos pelas mesmas equações matemáticas na forma adimensional. Os parâmetros adimensionais característicos devem ter os mesmos valores.

Se as equações não contiverem nenhum coeficiente dependente das características do sistema então se diz que as soluções são **auto-similares**.

Exemplo 3.9 (Difusão de calor) Considere duas paredes paralelas uma a $0^{0}C$ e a outra a $\tau_{0}{}^{0}C$. A distância entre elas é d e a temperatura (τ) do ar entre elas é solução da equação de difusão de calor

$$c\rho \frac{\partial \tau}{\partial t} = K\nabla^2 \tau,$$

onde c é o calor específico (em cal/g), ρ é a densidade e K a condutividade térmica. Como deve ser a equação a dimensional e a forma funcional de τ ?

Como todos os membros de uma equação devem ter a mesma dimensão,

$$\left[\frac{c\rho}{K}\right]\left[\frac{\partial\tau}{\partial t}\right] = \left[\nabla^2\tau\right].$$

Como

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 \tau \end{bmatrix} = TL^{-2} \quad e$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \tau}{\partial t} \end{bmatrix} = Tt^{-1},$$

onde T é a dimensão de temperatura e t a dimensão do tempo,

$$\left[\frac{c\rho}{K}\right] = tL^{-2}.$$

A constante

$$D \equiv \frac{K}{c\rho}$$

é conhecida como coeficiente de difusão de calor.

Dois parâmetros característicos do problema são de τ_0 . Outro parâmetro dimensionalmente independente seria

$$d^2/D \equiv d^2c\rho/K \equiv t_0$$

que tem dimensão de tempo.

Definindo as novas variáveis adimensionais em têrmos dêstes parâmetros dimensionalmente independentes teremos

$$\tau' \equiv \tau/\tau_0; \quad \vec{r'} \equiv \vec{r}/d \quad e \quad t' \equiv t/t_0 \equiv t \left(d^2/D\right)^{-1}.$$

A equação de difusão pode ser escrita

$$\frac{\partial \tau'}{\partial t'} = \nabla'^2 \tau'.$$

onde $\nabla'^2 \tau'$ é o laplaciano calculado em relação às novas coordenadas adimensionais. A equação fica auto-similar.

3.6.4 Equações adimensionais de Navier-Stokes

Devemos analisar a equação de Navier-Stokes 3-14 escrita na forma

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = \overrightarrow{f^V} - \frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v} + \left(\frac{\nu}{3} + \frac{\zeta}{\rho}\right) \nabla (\nabla \cdot \vec{v}) \tag{3-28}$$

e a equação de continuidade 2-3

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

Na equação de Navier-Stokes, o primeiro membro representa a aceleração de um elemento do fluido e o segundo membro contém as contribuições de diferentes forças para esta aceleração.

Normalmente, na Mecânica, tomamos como escalas fundamentais, as unidades padrões de comprimento, tempo e massa, que não têm nenhuma relação com o problema particular tratado. Por exemplo: metro, segundo e quilograma.

No escoamento de um fluido são relevantes, alguns valores característicos de velocidade, densidade e comprimento:

$$v_0, \rho_0 \in \ell_0,$$

respectivamente.

Estas 3 grandezas são dimensionalmente independentes e não há mais nenhuma outra (em Mecânica).

Podemos tomar, portanto, como unidades fundamentais v_0 , ρ_0 e ℓ_0 e escrever todas as outras grandezas em termos destas. Definimos a unidade de tempo e a de pressão como

$$t_0 \equiv \ell_0/v_0$$

$$P_0 \equiv \rho_0 v_0^2$$

A aceleração seria medida em unidades de $v_0/t_0 \equiv v_0^2/\ell_0$.

Definindo as variáveis adimensionais como $f' \equiv f/f_0$, obtém-se a equação adimensional dividindo 3-28 pela escala de aceleração v_0^2/ℓ_0 .

$$\frac{D\overrightarrow{v'}}{Dt'} = \frac{\partial \overrightarrow{v'}}{\partial t'} + \left(\nabla' \times \overrightarrow{v'}\right) \times \overrightarrow{v'} + \frac{1}{2}\nabla'v'^{2}
= \frac{\ell_{0}}{v_{0}^{2}} \overrightarrow{f^{V}} - \frac{\nabla'P'}{\rho'} + \frac{1}{Re} \left[\nabla'^{2}\overrightarrow{v'} + \left(\frac{1}{3} + \frac{\zeta}{\eta}\right)\nabla'(\nabla' \cdot \overrightarrow{v'})\right],$$
(3-29)

onde $Re \equiv v_0 \ell_0 / \nu$ é o número de Reynolds.

A equação de continuidade fica

$$\frac{1}{\rho'} \frac{D\rho'}{Dt'} + \nabla' \cdot \vec{v'} = 0.$$

Questão da compressibilidade

Todos os corpos são compressíveis, alguns mais, outros menos. A compressibilidade está relacionada com a velocidade de propagação do som $c_s \equiv (DP/D\rho)^{1/2}$. Alta compressibilidade corresponde a velocidade baixa de propagação do som.

Podemos escrever

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{DP} \frac{DP}{Dt} = \frac{1}{\rho c_s^2} \frac{DP}{Dt}.$$

Em têrmos das variáveis adimensionais podemos escrever

$$\frac{1}{\rho'} \frac{D\rho'}{Dt'} = \frac{1}{t_0} \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{t_0} \frac{1}{\rho c_s^2} \frac{DP}{Dt} = \frac{P_0}{\rho_0 c_s^2} \frac{1}{\rho'} \frac{DP'}{Dt'} \equiv M^2 \frac{1}{\rho'} \frac{DP'}{Dt'}$$

onde

$$M \equiv \frac{\sqrt{P_0/\rho_0}}{c_s} \equiv \frac{v_0}{c_s}$$

é conhecido como número de Mach.

O número de Mach está relacionado com a compressão no escoamento. Se o fluido tiver densidade razoàvelmente contínua podemos dizer que

$$\left| \frac{D' \rho'}{D' t'} \right| \simeq \left| \nabla' \rho' \right| \simeq M^2 \left| \nabla' P' \right|.$$

Consideremos o caso em que $M \ll 1$. Teremos

$$\begin{aligned} \left| \nabla' \rho' \right| &<< \left| \nabla' P' \right| & \text{e} & \therefore \left| \frac{\nabla' P'}{\rho'} \right| \simeq \left| \nabla' \left(\frac{P'}{\rho'} \right) \right|; \\ \left| \nabla' \cdot \vec{v'} \right| &= & \left| \frac{1}{\rho'} \frac{D \rho'}{D t'} \right| \left| \frac{1}{\rho'} \frac{D P'}{D t'} \right|. \end{aligned}$$

Na equação 3-29 os têrmos que contêm $\nabla' \cdot \vec{v'}$ ou qualquer derivada de ρ' são desprezíveis comparados com outros têrmos. Portanto a equação é a mesma que de fluidos incompressíveis, isto é

$$\frac{\partial \overrightarrow{v'}}{\partial t'} + \left(\nabla' \times \overrightarrow{v'}\right) \times \overrightarrow{v'} + \frac{1}{2}\nabla' v'^2 = \frac{\ell_0}{v_0^2} \overrightarrow{f^V} - \nabla' \left(\frac{P'}{\rho'}\right) + \frac{1}{Re} \nabla'^2 \overrightarrow{v'}$$

Questão da viscosidade

A importância do têrmo de força viscosa é determinada pelo valor do número de Reynolds Se a viscosidade é grande Re é pequeno; o têrmo da força viscosa é importante na equação da velocidade e quando surgem pequenas perturbações nas interfaces com sólidos elas são amortecidas.

Para Re pequeno, o fluxo é laminar (figura a).

Quando a viscosidade é muito pequena, Re >> 1, o têrmo de viscosidade na equação de Navier-Stokes é muito menor que o têrmo de inércia. À primeira vista, temos a impressão de que podemos simplesmente esquecer o efeito da força viscosa e trabalhar com a equação, de Euler, para fluidos não viscosos:

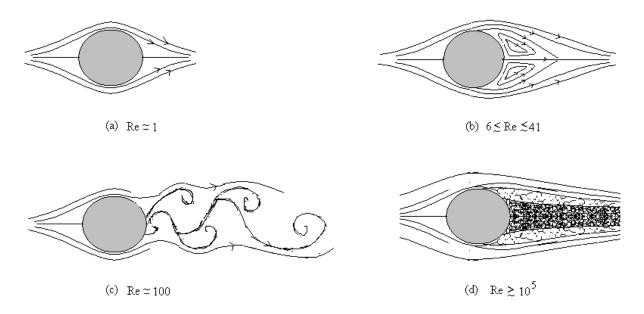
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = \overrightarrow{f^V} - \frac{\nabla P}{\rho}.$$

Os valores da viscosidade cinemática da água e do ar são muito baixos à temperatura ambiente de modo que quase todos os movimentos de fluidos encontrados na natureza apresentam números de Reynolds muito altos. Poder-se-ia esperar que a equação de Euler fosse da mais vasta aplicabilidade. No entanto, ela não explica alguns dos fenômenos mais corriqueiros observados no dia a dia.

Para valores altos de Re surge a chamada camada limite ("boundary layer") atrás de corpos sólidos imersos num fluido em movimento, onde se formam pequenos vórtices (figura b). Nesse

estágio o regime é estacionário.

Fluxo transversal em torno de um cilindro parado



Fora destas camadas o escoamento é laminar.

Para velocidades maiores, a camada limite, inicialmente colada no objeto sólido, se rompe e vórtices escapam formando uma esteira (**esteira de von Karman**) (figura c). O escoamento deixa de ser estacionário apesar de manter uma certa periodicidade.

Para Re muito grande, o escoamento na região atrás do obstáculo fica totalmente caótico. A turbulência se mantém estacionária e a camada limite fica fina e semi-infinita (figura d).

Da equação de Euler resulta a conservação de vorticidade. Um escoamento laminar não deveria se tornar turbulento, a não ser que ajam forças externas não conservativas.

Na realidade, certas instabilidades ocorrem; e, as perturbações não só não são amortecidas como podem crescer e o escoamento pode se tornar completamente instável e turbulento.

Um fluido hipotético ideal, de viscosidade zero, tem comportamento totalmente diferente de um fluido de viscosidade pequena mas não nula.

Êste assunto é discutido amplamente nas referências [2, 4, 5, 7, 8, 9, 3].

Na realidade, o têrmo da viscosidade não pode ser eliminado porque $\nabla^2 \vec{v}$ cresce muito devido à turbulência.

A equação de Navier-Stokes é válida para escoamentos laminares com coeficientes de viscosidade constantes.

Reynolds sugeriu que, para fluidos turbulentos, a equação pudesse ser usada para as velocidades instantâneas e locais. Do ponto de vista prático, estas equações não teriam validade imediata pois sòmente velocidades médias poderiam ser medidas experimentalmente. Seria então necessário escrever as equações para as velocidades instantâneas e depois tomar os valores médios.

Em fluidos altamente turbulentos é possível assumir que o transporte de momento por movimentos turbulentos do fluido ocorre de forma semelhante ao transporte por moléculas e usar coeficientes locais de viscosidade turbulenta ("eddy viscosity") η_{τ} e ζ_{τ} e obter uma equação similar à equação de Navier–Stokes para a velocidade média. A complicação que surge é a não uniformidade dêstes coeficientes.

Exemplo 3.10 Se um vento sopra a 36km/h,, na região de latitude $\lambda=45^{\circ}$, que distância deve

percorrer para que o efeito da força de Coriolis se faça sentir?

A densidade do ar $\acute{e} \approx 1,23kg/m^3$; a viscosidade cinemática no regime laminar $\acute{e} \approx 1,45 \times 10^{-5}m^2/s$ e no regime turbulento $\acute{e} \approx 20m^2/s$.

 $Na \ atmosfera$

$$\overrightarrow{f^V} pprox \overrightarrow{g_{ef}} - 2\overrightarrow{\Omega_{vert}} imes \overrightarrow{v}.$$

Na equação de Navier-Stokes adimensional aparece multiplicado por ℓ_0/v_0^2 e portanto

$$-\frac{\ell_0}{v_0^2} 2 \overrightarrow{\Omega_{vert}} \times \overrightarrow{v} = -\frac{\ell_0}{v_0} 2 \Omega \ sen \ \lambda \ \overrightarrow{e_z} \times \overrightarrow{v'} = \frac{1}{Ro} \overrightarrow{e_z} \times \overrightarrow{v'}.$$

 $Ro \equiv \ell_0 2\Omega \ sen \ \lambda/v_0$ é chamado **número de Rossby** e determina a importância ou não da força de Coriolis.

 $O\ t\^{e}rmo\ da\ força\ de\ Coriolis\ na\ equaç\~ao\ de\ Navier-Stokes\ \'e\ da\ ordem\ de\ 1/Ro.$

Se $Ro \lesssim 1$ o seu efeito é considerável, e portanto para $\ell_0 \lesssim v_0/2\Omega sen\lambda$.

Como $\Omega = 2\pi/1 dia = 2\pi/(86400s) \approx 10^{-4} s^{-1}$, ℓ_0 deve ser $\lesssim 100.000m$.

Se o regime fosse laminar o número de Reynolds seria

$$Re \equiv \ell_0 v_0 / \nu = 0,69 \times 10^{11} \gg 1.$$

O número de Reynolds no regime turbulento seria $Re_{\tau} \approx 50.000$.

A transição de escoamento laminar para turbulento se dá para $Re_{\tau} \lesssim 2000$, ou seja, não poderia ser laminar mas completamente turbulento.

A força viscosa é desprezível para a determinação da velocidade média de escoamento.

Problemas

1. Mostre que

$$\nabla \cdot (\varphi \stackrel{\leftrightarrow}{1}) = \nabla \varphi$$
$$\nabla \cdot (\vec{A}\vec{B}) = (\nabla \cdot \vec{A})\vec{B} + \vec{A} \cdot \nabla \vec{B}$$

2. É dado um tensor

$$(T_{ij}) \equiv \left(\begin{array}{cc} -ab & a^2 \\ -b^2 & ab \end{array}\right)$$

- (a) Escreva na forma $\overset{\leftrightarrow}{T} \equiv \overset{\leftrightarrow}{T^S} + \overset{\leftrightarrow}{T^A}$ onde $\overset{\leftrightarrow}{T^S}$ é um tensor simétrico e $\overset{\leftrightarrow}{T^A}$ um tensor assimétrico.
- (b) Caldule $\nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{T^S} e \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{T^A}$.
- (c) Dado $\vec{a} \equiv \vec{i} + 2\vec{j}$, determine

i.
$$\vec{a} \cdot \overset{\leftrightarrow}{T^A}$$
; $\overset{\leftrightarrow}{T^A} \cdot \vec{a}$

ii.
$$\vec{a} \cdot \overset{\leftrightarrow}{T^S}$$
; $\overset{\leftrightarrow}{T^S} \cdot \vec{a}$.

3. O tensor de tensões $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}$ é dado por

$$\overrightarrow{\sigma} \equiv \overrightarrow{\sigma'} - p \stackrel{\leftrightarrow}{1};$$

$$\sigma'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_\ell}{\partial x_\ell} \delta_{ik} \right) + \zeta \frac{\partial v_\ell}{\partial x_\ell} \delta_{ik}$$

onde η e ζ são coeficientes de viscosidade (constantes.)

- (a) Mostre que $\frac{1}{3}\sigma_{ii} = -P + \zeta \nabla \cdot \vec{v}$.
- (b) Escreva σ'_{11} e σ'_{12} da forma mais simplificada possível quando $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.
- (c) Qual é o significado físico de σ_{11} ? e σ_{12} ?
- 4. Verificar que no caso de rotação pura constante, $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$, $\sigma'_{ij} = 0$.
- 5. Usando a equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

mostre que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = \rho \frac{D \vec{v}}{D t}.$$

6. Mostre que, se um fluido for compressível

$$\nabla \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'} = (\partial_i \sigma'_{ik}) \vec{e_k} = \eta \nabla^2 \vec{v} + \left(\frac{\eta}{3} + \zeta\right) \nabla (\nabla \cdot \vec{v}).$$

7. Considere um sólido de volume V_0 e área de superfície externa S mergulhado num fluido, no campo gravitacional.

Mostre que a força sôbre o sólido é

$$\vec{F} = \int_{S_0} d\vec{S} \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma} + \vec{g} \int_{V_0} dV \rho_s.$$

O índice s refere-se ao sólido.

Como $\stackrel{\leftrightarrow}{\sigma} = \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'} - P \stackrel{\leftrightarrow}{1}$, se o sistema for estático temos

$$\vec{F} = -\int_{S_0} d\vec{S} P + \vec{g} \int_{V_0} dV \rho_s.$$

Define-se o empuxo do fluido sôbre o sólido como sendo

$$Empuxo \equiv -\int_{S_0} d\vec{S} P.$$

Obviamente o empuxo seria idêntico se ao invés do sólido, estivesse o próprio fluido ocupando o espaço do sólido e nêste caso o volume V_0 do fluido estaria em equilibrio mecânico. Para êste volume de fluido

$$-\int_{S_0} d\vec{S} P + \vec{g} \int_{V_0} dV \rho_{fluido} = 0.$$

Este é o famoso princípio de Arquimedes.

8. A equação de Navier-Stokes (para fluido ncompressível) é escrita

$$\rho \frac{D \vec{v}}{D t} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla P + \eta \nabla^2 \vec{v}.$$

Integrando $\eta \nabla^2 \vec{v}$ num volume de controle cúbico V_0 do fluido obtém-se, $\int_{S_0} d\vec{S} \cdot \eta \nabla \vec{v}$. Escreva o elemento desta integral em coordenadas cartesianas e dê o significado físico do mesmo.

9. O escoamento unidimensional, estacionário, na direção x, de um fluido viscoso e incompressível, entre 2 placas paralelas infinitas paradas, pode ser descrito pelas equações

$$P = -\rho \beta x + P_0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - \nu \nabla^2 v_x = \beta,$$

obtidas da equação de Navier-Stokes. A separação entre as placas é d. β é independente da posição.

- (a) Argumente porque v_x só depende de uma coordenada (normal às placas) e β é constante.
- (b) Que condições de contorno devem ser satisfeitas por v_x ?
- (c) Mostre que a velocidade do fluido, pode ser escrita

$$v_x = \left(-\frac{dP}{dx}\right) \frac{1}{2\eta} \left(\frac{d^2}{4} - y^2\right).$$

- (d) Relacione dP/dx e η com a velocidade máxima v_0 .
- (e) Escreva a força por unidade de área, exercida pelo fluido sobre as placas em termos de v_0 e η .

10. Considere um fluido estático no campo gravitacional.

Mostre, a partir da equação de Navier-Stokes ou de Euler, que

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g,$$

onde o eixo das coordenadas y é tomado na vertical, para cima, e que dentro de um fluido homogeneo, a variação da pressão é dada por

$$P = P_0 - \rho gy$$
.

11. Num tubo cilíndrico de raio a=1cm, na horizontal, estão adaptados dois tubos abertos como mostra a figura. Nele escoa agua, sendo a vazão de $1\ell/min$.



- (a) A agua atinge alturas diferentes nos dois tubos verticais. Explique porque.
- (b) Se a distancia entre os tubos verticais é de 10m e a diferença nos níveis de $\approx 2,5cm$, estime o valor do coeficiente de viscosidade da água.
- 12. O gradiente de pressão na vertical dP/dz depende da densidade e da gravidade.

Use a análise dimensional para determinar a relação.

- 13. Considere o escoamento de um fluido num cano de raio a. O fluxo de massa (massa que atravessa uma seção por unidade de tempo) depende
 - (a) do gradiente de pressão na direção do escoamento dP/dx;
 - (b) do raio do tubo a e
 - (c) da viscosidade cinética ν .

Como deve ser a forma do fluxo (Fórmula de Poiseuille)?

- 14. Um recipiente com água tem um furo de área A a uma profundidade h do nível da água. A massa que vaza por unidade de tempo do furo deve depender de ρ (densidade), A, g e h.
 - (a) Qual é o número de grandezas envolvidas com dimensões independentes?
 - (b) Que forma deve ter dM/dt?

Capítulo 4

Conservação de energia

A equação de Navier-Stokes contém a pressão que é uma grandeza termodinâmica. A pressão está relacionada com a temperatura, ou seja, a energia interna do fluido, ou seja, a energia das partículas que constituem o fluido. Portanto, o escoamento de um fluido depende das transformações termodinâmicas que ocorrem dentro do fluido.

Frequentemente, o fluido pode ser considerado incompressivel e portanto $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ e, esta condição e a equação de Navier-Stokes são suficientes para determinar \vec{v} .

Em outros casos, para completar a descrição do fluido precisamos de uma equação que estabeleça um balanço de todas as energias envolvidas e também da equação de estado (que relaciona as funções termodinâmicas de estado).

Por exemplo, no escoamento de um gás, em geral, a viscosidade e a condutividade térmica são desprezíveis, de modo que não há transformação de energia mecânica macroscópica em energia mecânica microscópica (dissipação de energia mecânica e consequente produção de entropia) ou trocas de calor e os processos podem ser considerados isentrópicos (entropia constante).

O terceiro principio fundamental da hidrodinâmica é o da conservação da energia representada pela primeira lei da termodinâmica.

Antes de continuar com o estudo de fluidos é conveniente rever algumas noções de termodinâmica.

4.1 Noções de termodinâmica

Certas grandezas macroscópicas como pressão (P), temperatura (T) e densidade (ρ) são usadas para descrever o estado termodinâmico e portanto são chamadas variáveis de estado. Elas são, rigorosamente, definidas sòmente para estados de equilíbrio, mas, frequentemente consideramos que os fluidos estão **localmente em equilíbrio**, numa pequena região na vizinhança de \vec{r} e definimos as funções $P(\vec{r},t)$, $T(\vec{r},t)$ e $\rho(\vec{r},t)$.

No contexto de fluidos, é conveniente usar valores **específicos**, por unidade de massa, ao invés de grandezas extensivas (que dependem da quantidade ou extensão da matéria).

Assim, definimos o volume específico $\mathcal{V} = 1/\rho$.

4.1.1 Equação de estado

As variáveis (P, ρ, T) ou (P, \mathcal{V}, T) não são independentes mas relacionadas por uma expressão chamada equação de estado.

Exemplo 4.1 (Gás perfeito) São gases que satisfazem a equação de Clapeyron:

$$P \ V = nRT \quad \Rightarrow \quad P \frac{V}{nm} = \frac{RT}{m} \quad \Rightarrow \quad P \ \mathcal{V} = \frac{RT}{m} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{R\rho T}{m},$$

onde

m é a massa de um mol do fluido,

n é o número de moles de um volume V do fluido e

R é a constante dos gases ideais $\approx 8,314J/(mol\ K)$.

Exemplo 4.2 (Gás de van der Waals) Nos gases reais, não muito rarefeitos, o volume ocupado pelas moléculas diminui o do espaço disponível para a circulação das moléculas. E também, perto de uma parede, as moléculas do fluido são puxadas para trás pelas moléculas vizinhas similares(força de van der Waals), de modo que a pressão efetivamente exercida na parede fica menor. Uma equação que leva em conta estas correções é

$$\left(P + \frac{a}{\mathcal{V}^2}\right)(\mathcal{V} - b) = \frac{RT}{m}.$$

a e b são as constantes de van der Waals da substancia em questão e estão relacionadas com a força intermolecular e o tamanho médio das moléculas, respectivamente.

4.1.2 Potenciais termodinâmicos

A primeira lei da termodinâmica estabelece a conservação de energia: a energia que um sistema recebe na forma de calor (Q) ou trabalho, que não altere o movimento macroscópico do sistema, como um todo se transforma em energia interna (U):

$$\delta Q - P\delta \mathcal{V} = \delta \mathcal{U}.$$

Notação: usaremos δf para designar a variação da grandeza f de <u>um elemento</u> do fluido num processo termodinâmico ou a quantidade de f trocada com a vizinhança.

De acordo com a segunda lei da termodinâmica, num processo cíclico reversível,

$$\oint \delta Q/T = 0.$$

Portanto, pode-se associar a um estado de um sistema, uma variável S, de modo que, num processo reversível, em que o sistema absorve calor δQ à temperatura T,

$$\delta S \equiv \delta Q/T$$
.

S é chamada entropia do sistema.

Num processo cíclico S volta ao seu valor inicial.

Num processo irreversível a entropia do universo cresce.

A conservação de energia pode ser escrita em têrmos de variáveis de estado como

$$\delta \mathcal{U} = T\delta \mathcal{S} - P\delta \mathcal{V}.$$

U fica determinada se dadas 2 variáveis de estado. Aqui, consideramos

$$\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}(\mathcal{S}, \mathcal{V}); \quad T \equiv T(\mathcal{S}, \mathcal{V}) \quad e \quad P \equiv P(\mathcal{S}, \mathcal{V}).$$

Obtemos, da equação acima

$$T = \left(\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \mathcal{S}}\right)_{\mathcal{V}} \qquad e \qquad P = -\left(\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta \mathcal{V}}\right)_{\mathcal{S}}.$$

Derivando a primeira equação em relação a $\mathcal V$ e a segunda em relação a $\mathcal S$ verifica-se que

$$\left(\frac{\delta T}{\delta \mathcal{V}}\right)_{\mathcal{S}} = -\left(\frac{\delta \mathcal{P}}{\delta \mathcal{S}}\right)_{\mathcal{V}}.$$

Esta relação é conhecida como uma das relações de Maxwell.

Se conhecida a função $\mathcal{U} \equiv \mathcal{U}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$ podemos obter todas as outras variáveis de estado. Funções dêste tipo são chamadas **potenciais termodinâmicos** e são todas dadas em têrmos de 2 variáveis de estado. São êles

Potenciais termodinâmicos		
Energia interna	$\mathcal{U}(\mathcal{S},\mathcal{V})$	$\delta \mathcal{U} = T\delta \mathcal{S} - P\delta \mathcal{V}$
Energia livre (potencial de Helmoltz)	$\mathcal{F}(T,\mathcal{V}) = \mathcal{U} - T\mathcal{S}$	$\delta \mathcal{F} = -\mathcal{S}\delta T - P\delta \mathcal{V}$
Entalpia	$\mathcal{H}(\mathcal{S}, P) = \mathcal{U} + P\mathcal{V}$	$\delta \mathcal{H} = T \delta \mathcal{S} + \mathcal{V} \delta P$
Potencial de Gibbs	$\mathcal{G}(T,P) = \mathcal{H} - T\mathcal{S}$	$\delta \mathcal{G} = -\mathcal{S}\delta T + \mathcal{V}\delta P$

Duas relações podem ser deduzidas para a entropia, chamadas, relações $T\delta S$:

1a. equação $T\delta S$	$T\delta \mathcal{S} = c_{\mathcal{V}}\delta T + T\frac{\alpha}{\kappa_T}\delta \mathcal{V}$
2 a. equação $T\delta \mathcal{S}$	$T\delta \mathcal{S} = c_P \delta T - T\alpha \mathcal{V} \delta P$

onde

$$\begin{split} \kappa_x &= -\frac{1}{\mathcal{V}} \left(\frac{\delta \mathcal{V}}{\delta P} \right)_x = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\delta \rho}{\delta P} \right)_x \text{ \'e a compressibilidade a x constante;} \\ \alpha &= \frac{1}{\mathcal{V}} \left(\frac{\delta \mathcal{V}}{\delta T} \right)_P = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\delta \rho}{\delta T} \right)_P \text{ o coeficiente de expansão térmica a pressão constante;} \\ c_{\mathcal{V}} &= T \left(\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta T} \right)_{\mathcal{V}} \text{ o calor especifico a volume constante e} \\ c_P &= T \left(\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta T} \right)_P \text{ o calor especifico a pressão constante.} \end{split}$$

Calor específico é o calor necessário para elevar a temperatua de 1^0 . O valor depende do mecanismo de troca de calor. Se a troca ocorrer segundo um processo em que uma grandeza x é mantida constante, temos $c_x = T(\delta \mathcal{S}/\delta T)_x$. Pode-se verificar que

$$c_{\mathcal{V}} = \left(\frac{\delta \mathcal{U}}{\delta T}\right)_{\mathcal{V}} \quad e \quad c_{P} = \left(\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta T}\right)_{P}.$$

As expressões podem ser escritas em têrmos da densidade fazendo

$$\mathcal{V} = 1/\rho \quad e \quad \delta \mathcal{V} = -\rho^{-2} \delta \rho.$$

Alguns casos interessantes de escoamento de fluido são:

- Isentrópico $(\frac{DS}{Dt} = 0)$: $\frac{DH}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{DP}{Dt}$.
- Incompressivel $(\frac{D\rho}{Dt} = 0; \nabla \cdot \vec{v} = 0)$: $\frac{D\mathcal{U}}{Dt} = T\frac{D\mathcal{S}}{Dt} = c_{\mathcal{V}}\frac{DT}{Dt}$.
- Isotérmico (temperatura uniforme; $\frac{DT}{Dt} \equiv 0$): $\frac{D\mathcal{G}}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{DP}{Dt}$.
- Baratrópico $(\rho(P))$: $\frac{dP}{\rho} = d[\int \frac{dP}{\rho(P)}]$.

Cada uma das variáveis de estado P, $\mathcal{V}(\equiv 1/\rho)$, T, \mathcal{S} , \mathcal{U} , \mathcal{H} e \mathcal{G} pode ser considerada uma função de apenas duas delas.

4.2 Equação da energia mecânica

A equação deduzida a seguir dá a variação da energia mecânica com o tempo. Ela não contém nenhuma informação a mais que a equação de Navier-Stokes; sendo uma equação escalar contém menos informações que a equação de Navier-Stokes.

Contudo, em alguns casos de escoamento estacionário, ela permite determinar uma integral primeira (conhecida como equação de Bernouilli), que relaciona a velocidade com outras grandezas termodinâmicas de estado. É o caso do escoamento incompressível, isentrópico ou baratrópico, em geral .

Dizemos que um fluido é **ideal** (ou **perfeito**) quando a dissipação de energia mecânica devida a viscosidade for desprezivel e, também, a troca de calor por condução for insignificante.

Frequentemente esta expressão é usada para designar somente escoamentos não compressíveis, com as características acima, mas aqui nós não faremos esta restrição.

A entropia de cada elemento do fluido é constante, ou seja, o escoamento é **isentrópico**. É um caso importante porque é aproximadamente o caso de muitos fenômenos geo e astrofísicos e também pela simplicidade.

O escoamento é dito **baratrópico** se a densidade puder ser escrita como função somente da pressão $(\rho(P))$.

Tomando o produto escalar da equação de Navier-Stokes pela velocidade \vec{v} temos

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot \vec{v} = \rho \frac{D}{Dt} \frac{v^2}{2} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{v^2}{2} + \vec{v} \cdot \nabla \frac{v^2}{2} \right)$$

$$= \rho \vec{v} \cdot \vec{f}^{\vec{V}} + \vec{v} \cdot \nabla \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma} = \rho \vec{v} \cdot \vec{f}^{\vec{V}} - \vec{v} \cdot \nabla P + \vec{v} \cdot \nabla \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'}.$$
(4-1)

Na superfície terrestre, num referencial que gira com a Terra, em geral,

$$\vec{f}^V \equiv \vec{g}_{ef} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}$$
.

Introduzindo a energia potencial gravitacional efetiva, por unidade de massa, Φ :

$$-\nabla \Phi = \overrightarrow{g_{ef}} \ \Rightarrow \ \Phi = g_{ef}z,$$

onde z é a coordenada vertical para cima, podemos escrever

$$\vec{f^V} \cdot \vec{v} = \vec{g_{ef}} \cdot \vec{v} = -\nabla \Phi \cdot \vec{v}.$$

A equação 4-1 fica

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{v^2}{2} = -\vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \Phi \right) - \vec{v} \cdot \frac{\nabla P}{\rho} + \vec{v} \cdot \frac{\nabla \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'}}{\rho}$$
 (4-1')

Teorema 4.1 (Equação de Bernouilli para fluidos incompressíveis) $v^2/2 + P/\rho + \Phi$ é constante ao longo de uma linha de corrente, no escoamento estacionário e incompressível de um fluido ideal.

Demonstração: Se o escoamento for <u>estacionário</u>, <u>incompressível</u> e de <u>viscosidade</u> <u>desprezível</u>, como ρ é constante, da equação 4-1' resulta que

$$\vec{v} \cdot \nabla \left(v^2 / 2 + P / \rho + \Phi \right) = 0.$$

Para um deslocamento $\delta \vec{r}$ do fluido $\delta \vec{r} = \vec{v} \delta t$,

$$\delta \vec{r} \cdot \nabla \left(\frac{v^2}{2} + P/\rho + \Phi \right) = 0$$

e portanto concluimos que

$$v^2/2 + P/\rho + \Phi = constante$$

ao longo de uma linha de corrente.

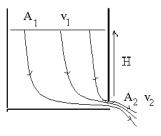
Esta equação é conhecida como a de Bernouilli. C.q.d.

Exemplos

Exemplo 4.3 (Fórmula de Torricelli)

Dá a velocidade de escape de um líquido por um orifício no recipiente que o contém.

Um tanque tem um líquido até um nível H acima de um orificio. Assume-se que a superfície livre e o jato de líquido estão sob mesma pressão (atmosférica). A velocidade do jato (v_2) está relacionada com a velocidade com que cai o nível do líquido (v_1) , por $v_1A_1 = v_2A_2$.



 A_1 e A_2 são as áreas da seção do tanque e do orifício, respectivamente. Usando o teorema de Bernouilli ao longo de uma linha de corrente que parte da superficie livre do líquido, obtemos

$$\frac{v_1^2}{2} + P/\rho + gH = \frac{v_2^2}{2} + P/\rho.$$

Portanto

$$v_1^2 = 2 \frac{\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2} gH$$
 e $v_2^2 = 2 \frac{1}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2} gH$.

Como $v_1 = -dH/dt$ a expressão para v_1 representa um movimento uniformemente desacelerado do nível do líquido com desaceleração

$$a \equiv \frac{\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2} g.$$

Se o orificio for pequeno comparado com o tanque,

$$v_2 \simeq \sqrt{2gH}$$

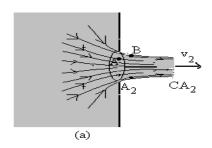
e a velocidade de escape é igual à velocidade de queda livre.

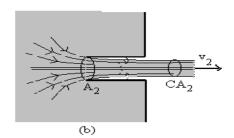
Ao usar a equação de Bernouilli foi assumido que $\partial/\partial t$ é desprezível comparado a outros têrmos em (4-1'). Pelo resultado obtido $a << q \equiv |\nabla \phi|$.

A vazão pelo orificio deve ser

$$Q = A_2 v_2 \simeq A_2 \sqrt{2gH}.$$

Na realidade há uma complicação: perto do orificio há o fenômeno conhecido como **vena contracta**, como mostram as figuras.





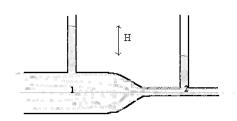
Devido a curvatura das linhas de fluxo, a area da seção transversal do filete de água é menor que a area do orificio.

A pressão em A é maior que em B, onde a pressão é atmosférica e o fluido em A ainda está sendo acelerado logo que sai do orificio. A relção entre as vazões vA = constante só vale depois que o jato já se contraiu.

C é o coeficiente de contração e a area efetiva do jato é e também do número de Reynolds. No caso de um orificia

Exemplo 4.4 (tubo de Venturi) \acute{E} usado para medir a velocidade de um fluido.

É um tubo axialmente simétrico, aberto nas extremidades, com um estrangulamento numa região. Um manômetro é adaptado para medir a queda de pressão na parte estrangulada, como mostra a figura. Se o tubo for colocado paralelamente ao fluxo de um líquido, na horizontal, os níveis do líquido ficam diferentes nos dois ramos do manômetro.



Se o escoamento é laminar e ideal, a velocidade é uniforme em toda seção transversal. Se as áreas das seções são A_1 e A_2

$$P_1 - P_2 = \rho g H;$$
 $v_1 A_1 = v_2 A_2$ e $\frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho}.$

 $Portanto,\ no\ ponto\ de\ estrangulamento\ a\ press\~ao\ \'e\ menor\ e\ a\ velocidade\ \'e\ maior.\ E\ a\ velocidade\ do\ fluido\ \'e\ determinada\ pela\ express\~ao$

$$v_1 = A_2 \left(\frac{2gH}{A_1^2 - A_2^2} \right)^{1/2}.$$

Teorema 4.2 (Equação de Bernouilli para fluidos compressíveis) $\mathcal{H} + v^2/2 + \Phi$ é constante ao longo de uma linha de corrente num escoamento isentrópico e <u>estacionário</u>.

 ${\cal H}$ é a entalpia específica e Φ a energia potencial por unidade de massa.

Demonstração. Da relação $\delta \mathcal{H} = T \delta \mathcal{S} + \mathcal{V} \delta P$ tiramos

$$\frac{D\mathcal{H}}{Dt} = T\frac{D\mathcal{S}}{Dt} + \mathcal{V}\frac{DP}{Dt}$$

e, no caso estacionário e isentrópico,

$$\vec{v} \cdot \nabla \mathcal{H} = \vec{v} \cdot \mathcal{V} \nabla P = \vec{v} \cdot \frac{\nabla P}{\rho}.$$

Usando esta relação em 4-1' e considerando o regime estacionário, obtemos

$$\vec{v} \cdot \nabla \left(\mathcal{H} + \frac{1}{2}v^2 + \Phi \right) = 0.$$

Para um deslocamento $\delta \vec{r} \equiv \vec{v} \delta t$ do fluido, $\delta \vec{r} \cdot \nabla \left(\mathcal{H} + \frac{v^2}{2} + \Phi \right) = 0$ e portanto concluimos que

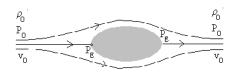
$$\mathcal{H} + v^2/2 + \Phi = constan$$

ao longo de uma linha de corrente, c.q.d.

Exemplo 4.5 (Corpo sólido imerso num fluido)

Se um fluido encontra um corpo sólido parado passa desviando.

Sôbre o corpo aparecem pontos onde a velocidade é zero, chamados pontos de **estagnação** (E). Longe do corpo o fluxo é uniforme e a densidade, a pressão e a velocidade podem ser designadas por ρ_0 , P_0 e $\vec{v_0}$, respectivamente.



Se <u>não</u> houver compressão a equação de Bernouilli ao longo da linha de corrente que termina num ponto de estagnação fica

$$\frac{P_E}{\rho_0} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{P_0}{\rho_0}.$$

Esta equação pode ser reescrita para os gases ideais como

$$\frac{P_E}{P_0} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\rho_0 v_0^2}{P_0} = 1 + \frac{\gamma}{2} \frac{v_0^2}{c_S^2}$$
 (4-3)

onde $\gamma \equiv c_P/c_v$ e $c_S \equiv \sqrt{\gamma P_0/\rho_0}$ é a velocidade do som.

 $H\'{a}$ um aumento de pressão no ponto de estagnação. O aumento é chamado de pressão dinâmica.

Questão da Compressibilidade. Se o fluido é um gás ideal espera-se que haja compressão aproximadamente adiabática e a expressão a ser usada deve ser 4-2, juntamente com

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \qquad e \qquad \delta \mathcal{H} = \frac{\delta P}{\rho}.$$

A expressão da entalpia fica

$$\mathcal{H} - \mathcal{H}_0 = \int_{P_0}^{P} \frac{dP}{\rho} = \int_{P_0}^{P} \frac{dP}{\rho_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{\rho_0} \left(\left(\frac{P}{P_0}\right)^{1 - \frac{1}{\gamma}} - 1 \right). \tag{4-4}$$

Desconsiderando a energia potencial obtemos de 4-2:

$$\mathcal{H}_E = \mathcal{H}_0 + \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow \frac{v_0^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{\rho_0} \left(\left(\frac{P_E}{P_0} \right)^{1 - \frac{1}{\gamma}} - 1 \right).$$

A pressão pode ser escrita como

$$\frac{P_E}{P_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{v_0^2}{c_S^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \tag{4-5}$$

Expandindo 4-5 em série de potências do <u>número de Mach</u> $M \equiv v_0/c_S$ e desprezando têrmos da ordem de M^4 obtém-se exatamente a expressão 4-3. Portanto, temos a confirmação de que para baixas velocidades (M << 1) o gás pode ser considerado incompressível.

Exemplo 4.6 (tubo de Pitot) Permite a determinação da velocidade em um fluido.

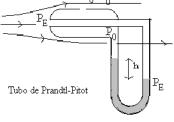
O tubo tem duas aberturas para a entrada do fluido. Quando o fluido passa pelo tubo forma-se um ponto de estagnação em uma das aberturas do tubo e o fluido passa pela segunda abertura pràticamente sem alterar a sua velocidade v_0 . A compressão está relacionada com v_0 por (4-3) (M << 1) ou (4-4) $(M \gtrsim 1)$.

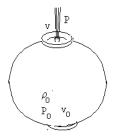
 v_0 é calculada usando a expressão $P_E - P_0 = \rho_\ell g h$ e a medida de h no manômetro. ρ_ℓ é a densidade do fluido no manômetro.



Exemplo 4.7 (Velocidade de escape de um gás)

Consideremos um gás que escapa de um recipiente por um orifício, pequeno comparado com a dimensão do recipiente. O fluido no interior pode ser considerado parado e portanto uma linha de corrente tem um ponto de estagnação dentro do recipiente. Sejam ρ_0 , P_0 e T_0 a densidade, a pressão e a temperatura, respectivamente, dentro do recipiente; as letras sem índice designam os valores das grandezas na abertura.





Usando a expressão da entalpia 4-4 obtida no exemplo 4.5 e o teorema de Bernouilli para escoamento adiabático $\mathcal{H} + v^2/2 = \mathcal{H}_0$, a velocidade de escape é obtida como

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{\rho_0} \left(1 - \left(\frac{P}{P_0} \right)^{1 - \frac{1}{\gamma}} \right). \tag{4-6}$$

Observa-se que $v \leq v_m$ onde

$$v_m \equiv \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{RT_0}{m}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} c_s,$$

que depende sòmente de T_0 .

Portanto a velocidade de escape está limitada pela temperatura dentro do recipiente.

Teorema 4.3 (Escoamento baratrópico.) $v^2/2+\int dP/\rho+\Phi$ é constante ao longo de uma linha de corrente

Se a densidade puder ser escrita como função somente da pressão $(\rho(P))$ (escoamento baratrópico), então

$$\nabla \int^{P} \frac{dP}{\rho} = \frac{\nabla P}{\rho}.$$

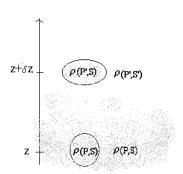
Usando esta relação em 4-1', o resultado é imediato.

O escoamento isentrópico e estacionario de um gás ideal é um caso particular de escoamento baratrópico, e

$$\nabla \mathcal{H} = \frac{\nabla P}{\rho}.$$

Exemplo 4.8 (Convecção na atmosfera) Na camada mais baixa da atmosfera terrestre, chamada troposfera, de espessura da ordem de 10km há um contínuo movimento do ar, ou na forma de vento ou na forma de convecção devido ao aquecimento do chão por raios solares.

Apesar de haver equilibrio de forças ($\nabla P = \rho \vec{g}$), a atmosfera pode não ser estável. Suponha que um elemento à altura z suba adiabàticamente até a altura $z' \equiv z + \delta z$.



Se a densidade dêste elemento for maior que a densidade da vizinhança, o elemento vai voltar à posição inicial e não haverá convecção.

Suponha que em z a densidade seja $\rho(P, S)$.

Em z' a densidade será $\rho(P', S)$, pois o elemento deve subir rápido o suficiente para que não tenha tempo de trocar de calor e portanto, à entropia constante. A sua pressão deve ser a cada instante igual à da sua vizinhança porque a equalização da pressão se dá na escala de tempo gasta na propagação do som.

Em z' a densidade na vizinhança será $\rho(P', S')$; $P' \equiv P(z + \delta z)$; $S' \equiv S(z + \delta z)$.

A condição para que não haja convecção é $\rho(P',\mathcal{S}) > \rho(P',\mathcal{S}')$ pois assim o elemento de fluido volta à posição inicial.

Em têrmos de volume específico fica

$$V(P', S') - V(P', S) > 0$$

ou,

$$\left(\frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \mathcal{S}}\right)_{P} \frac{d\mathcal{S}}{dz} \delta z > 0.$$

Podemos escrever

$$\left.\frac{\delta\mathcal{V}}{\delta\mathcal{S}}\right)_{P} = \left.\frac{\delta\mathcal{V}}{\delta T}\right)_{P} \left.\frac{\delta T}{\delta\mathcal{S}}\right)_{P} = \mathcal{V}T\frac{1}{\mathcal{V}} \left.\frac{\delta\mathcal{V}}{\delta T}\right)_{P} \left.\frac{1}{T}\frac{\delta T}{\delta\mathcal{S}}\right)_{P} = \mathcal{V}T\frac{\alpha}{c_{P}}$$

onde $\alpha \equiv \frac{1}{\mathcal{V}} \left(\frac{\delta \mathcal{V}}{\delta T} \right)_P$ é o coeficiente de expansão térmica a pressão constante (positiva) e c_P é o calor específico a pressão constante, também positiva.

Portanto a condição de não convecção fica simplesmente

$$\frac{dS}{dz} > 0.$$

A entropia específica deve aumentar com a altitude.

Conhecemos

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad e \quad \frac{dT}{dz}$$

pelo modelo de atmosfera.

Portanto podemos escrever S em função de P e z : S(P,T).

A equação TdS dá

$$TdS = c_P dT - T\alpha \mathcal{V}dP$$

$$T\frac{dS}{dz} = c_P \frac{dT}{dz} - T\alpha \mathcal{V}\frac{dP}{dz} = c_P \frac{dT}{dz} + T\alpha \mathcal{V}\rho g = c_P \frac{dT}{dz} + T\alpha g$$

A condição de não convecção deve ser

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{T\alpha g}{c_P}$$

Se a atmosfera for aproximadamente um gás ideal deve valer a relação $P=R\rho T/m$. m é a massa molecular média e vale $\simeq 29$ (78% de N_2 e 21% de O_2).

$$T\alpha = \frac{T}{\mathcal{V}} \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta T} \Big)_P = 1.$$

$$\frac{dT}{dz} > -\frac{g}{c_P}$$

 c_P é o calor específico por unidade de massa. O calor específico molar é 7R/2. Portanto $c_P = 7R/(2m)$. Portanto se

$$\frac{dT}{dz} \gtrsim -10^0 K/km$$

não deve haver convecção.

O gradiente de temperatura na atmosfera, até uma altura $\lesssim 10 km$ é de aproximadamente -6,5 $^0K/km$ e portanto a condição acima está satisfeita. Esta região é chamada troposfera.

No entanto, sabemos que esta região não é muito calma. O modelo de gás perfeito não deve ser muito adequado, isto é, ou $T\alpha = \frac{T}{\mathcal{V}} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T} \rangle_P = 1$ está incorreto ou o valor de c_P deve ser > 7R/(2m). Na atmosfera úmida, o calor latente de evaporação, da ordem de 540cal/g, deve ser levado em consideração no cálculo de c_P . Nesta região deve haver corrente ascendente.

Acima de $\simeq 10km$, na tropopausa, a temperatura é aproximadamente constante e igual a $\simeq -56^{\circ}C$, dependendo da latitude e da época do ano. Mais acima, na estratosfera, a alturas entre $\simeq 15km$ e 50km, o módulo do gradiente de temperatura é menor. Nestas regiões, a atmosfera deve ser calma. De fato, a estratosfera é caracterizada por pouca mistura vertical. Camadas de aerosol persistem por longos períodos de tempo, praticamente na mesma altura.

4.3 Equação da energia total

Para a descrição completa de um escoamento precisamos efetivamente, além das equações de continuidade e de Navier-Stokes, da equação de conservação da energia total.

Consideremos um volume $V_0(t)$ (borda $S_0(t)$), que se move com o fluido.

A variação de energia (δE) dentro de $V_0(t)$ é devida ao trabalho realizado (δW) sôbre o fluido em $V_0(t)$ e à troca de calor (δQ) com a vizinhança, ou fonte:

$$\delta E = \delta W + \delta Q,\tag{4-7}$$

onde $E \equiv \rho \left(\mathcal{U} + \frac{1}{2}v^2\right)$ é a energia total, isto é, a energia interna do movimento microscópico das moléculas $(\rho \mathcal{U})$ mais a energia mecânica de escoamento do fluido $(\rho v^2/2)$.

 \mathcal{U} é a energia interna por unidade de massa.

Variação da energia total

Pelo teorema 3.1 (de Leibnitz)

$$\begin{split} \frac{DE}{Dt} & \equiv \frac{D}{Dt} \int_{V_0(t)} dV \rho \left(\mathcal{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) = \int_{V_0(t)} dV \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\mathcal{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) + \int_{S_0(t)} d\vec{S} \cdot \vec{v} \rho \left(\mathcal{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) \\ & = \int_{V_0(t)} dV \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\mathcal{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) + \int_{V_0(t)} dV \nabla \cdot \vec{v} \rho \left(\mathcal{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) \\ & = \int_{V_0(t)} dV \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\mathcal{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) + \nabla \cdot \vec{v} \rho \left(\mathcal{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) \right]. \end{split}$$

Trabalho sôbre o fluido

Sôbre cada elemento de massa age uma força volumétrica $\vec{f^V}$ e nas bordas uma força $d\vec{S} \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma}$ (equação 3-8). Portanto, o trabalho realizado sôbre o elemento de fluido dentro de $V_0(t)$ durante um intervalo de tempo, por unidade de tempo (potência), é

$$\begin{split} \frac{\delta W}{\delta t} &= \int_{V_0(t)} dV \rho \vec{f^V} \cdot \vec{v} + \int_{S_0(t)} d\vec{S} \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma} \cdot \vec{v} \\ &= \int_{V_0(t)} dV \rho \vec{f^V} \cdot \vec{v} + \int_{V_0(t)} dV \nabla \cdot \left(\stackrel{\leftrightarrow}{\sigma} \cdot \vec{v} \right) \\ &= \int_{V_0(t)} dV \left[\rho \vec{f^V} \cdot \vec{v} + \nabla \cdot \left(\stackrel{\leftrightarrow}{\sigma} \cdot \vec{v} \right) \right]. \end{split}$$

Caso haja uma hélice dentro da região um têrmo extra aparece, correspondente à potência do motor da hélice \dot{W}_m .

Razão de transferência de calor

A quantidade de calor que entra em $V_0(t)$ é devida, em parte, ao fluxo através de $S_0(t)$ causado por um gradiente de temperatura,

$$-\int_{S_0(t)} d\vec{S} \cdot \overrightarrow{J_q},$$

e, em parte, devida a transformadação de outras formas de energia em calor e que pode ser representada em têrmos de uma fonte ou sorvedouro (fonte negativa)

$$\int_{V_0(t)} dV \rho \dot{q}_{fonte}.$$

 \dot{q}_{fonte} seria a razão de aquecimento por unidade de massa devido à fonte.

 $\overrightarrow{J_q}$ seria a densidade de corrente de calor. Sua direção e o sentido são a direção e o sentido do fluxo de calor e o módulo é o calor que passa por uma superfície, por unidade de área, por unidade de tempo.

Portanto,

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \int_{V_0(t)} dV \rho \dot{q}_{fonte} - \int_{S_0(t)} d\vec{S} \cdot \overrightarrow{J_q}.$$

Experimentalmente, pode-se determinar a relação entre $\overrightarrow{J_q}$ e o gradiente da temperatura:

$$\overrightarrow{J_q} \approx -K\nabla T.$$

K é a condutividade térmica ou coeficiente de transporte de calor no fluido, e é aproximadamente constante, quando o gradiente de temperatura não for muito grande.

Usando teorias da mecânica estatística é possível obter a mesma relação. Neste caso temos, usando o teorema de Gauss

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \int_{V_0(t)} dV \left(\rho \dot{q}_{fonte} + K \nabla^2 T \right).$$

Coletando os têrmos obtemos a forma integral da equação de conservação de energia

$$\int_{V_0(t)} dV \qquad \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} \left(\mathcal{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) + \nabla \cdot \vec{v} \rho \left(\mathcal{U} + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] =
\int_{V_0(t)} dV \left[\rho \vec{f}^{\vec{V}} \cdot \vec{v} + \nabla \cdot \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{v} \right) + \rho \dot{q}_{fonte} + K \nabla^2 T \right]$$
(4-8)

Como a relação deve valer para $V_0(t) \to 0$, podemos obter a relação diferencial

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\mathcal{U} + \frac{1}{2}v^{2}\right) + \nabla \cdot \vec{v}\rho\left(\mathcal{U} + \frac{1}{2}v^{2}\right) =$$

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{U} + \frac{1}{2}v^{2}\right) + \vec{v} \cdot \nabla\left(\mathcal{U} + \frac{1}{2}v^{2}\right)\right] =$$

$$\rho\left[\frac{D}{Dt}\left(\mathcal{U} + \frac{1}{2}v^{2}\right)\right] =$$

$$\rho\vec{f}^{\vec{V}} \cdot \vec{v} + \nabla \cdot \left(\stackrel{\leftrightarrow}{\sigma} \cdot \vec{v}\right) + \rho\dot{q}_{fonte} + K\nabla^{2}T =$$

$$\rho\vec{f}^{\vec{V}} \cdot \vec{v} - \nabla \cdot (P\vec{v}) + \nabla \cdot \left(\stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'} \cdot \vec{v}\right) + \rho\dot{q}_{fonte} + K\nabla^{2}T.$$
(4-9)

4.4 Equação da energia interna

Subtraindo 4-1 da 4-9 obtemos

$$\rho \frac{D\mathcal{U}}{Dt} = \nabla \cdot \left(\stackrel{\leftrightarrow}{\sigma} \cdot \vec{v} \right) - \vec{v} \cdot \nabla \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma} + \rho \dot{q}_{fonte} + K \nabla^2 T$$

$$= \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma} : \nabla \vec{v} + \rho \dot{q}_{fonte} + K \nabla^2 T$$

$$= -P \nabla \cdot \vec{v} + \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'} : \nabla \vec{v} + \rho \dot{q}_{fonte} + K \nabla^2 T \tag{4-10}$$

onde $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}$: $\nabla \vec{v} \equiv \sigma_{ij} \partial_i v_j$.

O têrmo $P\nabla \cdot \vec{v}$ corresponde ao trabalho realizado pelo fluido na expansão. Para verificar isto usamos a equação de continuidade de massa $D\rho/Dt = -\rho\nabla \cdot \vec{v}$ e $\rho = 1/\mathcal{V}$:

$$P\nabla \cdot \vec{v} = -P\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = P\frac{1}{\mathcal{V}}\frac{D\mathcal{V}}{Dt} = \rho P\frac{D\mathcal{V}}{Dt}.$$

 $P\frac{D\mathcal{V}}{Dt}$ é o trabalho realizado por uma unidade de massa do fluido, por unidade de tempo, na expansão, isto é, a potência por unidade de massa.

 $K\nabla^2 T$ é o têrmo devido à condução térmica.

Num processo sem compressão, o calor absorvido ou gerado faz variar a energia interna.

A equação 4-10 juntamente com a equação de continuidade, a equação de Navier-Stokes e a equação de estado do fluido são suficientes para determinar todas as grandezas relacionadas com o escoamento: \vec{v} , ρ e P.

As vezes é mais conveniente escrever a equação de conservação de energia em têrmos de outras funções termodinâmicas, o que é feito a seguir.

4.5 Equação da entropia

Se compararmos a equação 4-10 com

$$\delta \mathcal{U} = T\delta \mathcal{S} - P\delta \mathcal{V}$$

podemos escrever

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{1}{\rho T} \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'}: \nabla \vec{v} + \frac{\dot{q}_{fonte}}{T} + \frac{1}{\rho T} K \nabla^2 T. \tag{4-11}$$

No segundo membro desta equação, o primeiro têrmo é a entropia produzida pela força viscosa por unidade de tempo, por unidade de massa. Está relacionada com a dissipação de energia mecânica pela viscosidade.

O segundo têrmo é produzido por uma fonte.

O último têrmo é a entropia que entra pela superfície por condução térmica.

Num processo isentrópico (dissipação de energia mecânica devida a viscosidade, desprezivel e, também, troca de calor por condução, desprezivel), $D\mathcal{S}/Dt = 0$.

4.6 Equação da entalpia

Para a entalpia $\mathcal{H} = \mathcal{U} + P\mathcal{V} = \mathcal{U} + P/\rho$ pode-se escrever

$$\frac{D\mathcal{H}}{Dt} = \frac{D\mathcal{U}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{DP}{Dt} - \frac{P}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}.$$

Usando a equação da continuidade, temos

$$\frac{D\mathcal{H}}{Dt} = \frac{D\mathcal{U}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{DP}{Dt} + \frac{P}{\rho} \nabla \cdot \vec{v} = \frac{D\mathcal{U}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (P\vec{v}).$$

Usando esta relação na equação de energia 4-9 obtemos

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\mathcal{H} + \frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{\partial P}{\partial t} + \rho \vec{f^V} \cdot \vec{v} + \nabla \cdot \left(\stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'} \cdot \vec{v} \right) + \rho \dot{q}_{fonte} + K \nabla^2 T$$
 (4-12)

A equação de Bernouilli para escoamento isentrópico e estacionário de fluidos compressíveis pode ser obtida diretamente da equação 4-12:

$$\frac{D}{Dt}\left(\mathcal{H} + \frac{1}{2}v^2\right) - \vec{f^V} \cdot \vec{v} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathcal{H} + \frac{1}{2}v^2\right) + \vec{v} \cdot \nabla\left(\mathcal{H} + \frac{1}{2}v^2\right) + \vec{v} \cdot \nabla\Phi = 0.$$

No regime estacionário teríamos

$$\vec{v} \cdot \nabla \left(\mathcal{H} + \frac{1}{2} v^2 + \Phi \right) = 0.$$

Problemas

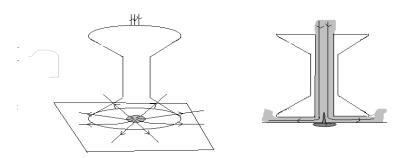
- 1. (a) Escreva $d\mathcal{U} = Td\mathcal{S} Pd\mathcal{V}$ tomando como variaveis independentes \mathcal{S} e $\rho \equiv 1/\mathcal{V}$ ao invés de \mathcal{S} e \mathcal{V} e verifique as relações $T = \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial s}\right)_{\rho}$ e $P = \rho^2 \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \rho}\right)_{c}$.
 - (b) Para um gás ideal de massa molecular m

$$\mathcal{U}(\mathcal{S}, \rho) = c_v \rho^{\frac{R}{mc_v}} e^{\frac{\mathcal{S}}{c_v}}$$

onde c_v é a capacidade térmica a volume constante, por unidade de massa. Determine $T(S, \rho)$ e $P(S, \rho)$.

- (c) Explique porque as expressões obtidas para $T(S, \rho)$ e $P(S, \rho)$ representam a equação de estado do gás na forma paramétrica.
- (d) Obtenha a equação de estado na forma de Clapeyron $P = R\rho T/m$.
- (e) Como você obteria a entalpia em têrmos de S e P ($\mathcal{H}(S, P)$)?
- (f) Justifique a afirmação: Dado um potencial termodinâmico em função de 2 variáveis de estado podem-se determinar todas as outras variáveis de estado.
- 2. A atmosfera é aproximadamente um gás ideal de modo que vale a relação $P = R\rho T/m$. m é a massa molecular média e vale $\simeq 29$ (78% de N_2 e 21% de O_2). Considere a atmosfera terrestre aproximadamente estática ($\vec{v} \equiv 0$).
 - (a) A atmosfera pode ser considerada um gás politrópico, isto é, $P\rho^{-n}$ =constante, com índice n=1.23 até uma altura $\lesssim 10km$. Esta região é chamada troposfera. Como varia a pressão, a densidade e a temperatura com a altitude, nesta região?
 - (b) Na tropopausa, a alturas acima de $\simeq 10km$, a temperatura é aproximadamente constante e igual a $-56^{\circ}C$. Como varia a pressão e a densidade com a altitude, nesta região?
- 3. Aproxima-se um pedaço de papel na parte inferior de um carretel com o eixo na vertical, de raio a, com um pequeno orifício de raio b. Na figura, o percevejo serve para manter o centro do carretel no centro do papel. Em seguida assopra-se da parte superior do orifício do carretel. O que acontece com o cartão? Se a velocidade do ar assoprado é v₀, faça uma estimativa da força que atua sobre o cartão.

A viscosidade do ar deve ser desprezível. Você pode considerar que o regime é estacionário e incompressível.



4. Um gás perfeito satisfaz a equação de Clapeyron: $P \mathcal{V} = RT/m$, onde

¹tirado da referência [10]

- m é a massa de um mol do fluido,
- n é o número de moles de um volume V do fluido e
- R é a constante dos gases ideais $\approx 8,314J/(mol\ K)$.
- (a) Sabendo que o calor especifico a volume constante $c_{\mathcal{V}}$ é constante (independente do estado), determine
 - i. a compressibilidade a T constante $\kappa_T \equiv -\frac{1}{\mathcal{V}} \left(\frac{\delta \mathcal{V}}{\delta P}\right)_T$;
 - ii. o coeficiente de expansão térmica a pressão constante $\alpha \equiv \frac{1}{V} \left(\frac{\delta \mathcal{V}}{\delta T} \right)_P$;
 - iii. a entropia S(T, V);
 - iv. a entropia S(T, P);
 - v. o calor específico a pressão constante $c_P \equiv T\left(\frac{\delta S}{\delta T}\right)_P$;
 - vi. a energia interna $\mathcal{U}(\mathcal{S}, \mathcal{V})$;
- (b) Usando os resultados do item anterior, mostre que, numa compressão adiabática $(\delta S = 0)$ em que o gás é comprimido de V_0 para V, a temperatura varia de T_0 para T, onde

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{\mathcal{V}_0}{\mathcal{V}}\right)^{\frac{R}{mc_{\mathcal{V}}}}.$$

- (c) Num motor a jato, o ar é comprimido rapidamente a 1/25 do volume original e é em seguida usado para queimar o combustível. Avalie a temperatura do ar imediatamente antes de queimar o combustível. A temperatura inicial pode ser considerada $\approx 300K$.
 - O ar é aproximadamente diatômico e $c_{\mathcal{V}} \approx 5R/2m$.
- 5. O potencial gravitacional, definido por $\overrightarrow{f^V}=-\nabla\phi$ ($\overrightarrow{f^V}$ é a força por unidade de massa), de uma estrêla é dado por
 - $\nabla^2 \phi = 4\pi G.$
 - (a) Mostre, usando coordenadas esféricas, que , se uma estrela for esfericamente simétrica, a equação de Euler fica

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho.$$

(b) Determine a pressão no centro da esfera se a densidade for da forma

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right).$$

Capítulo 5

Vorticidade. Escoamentos com número de Reynolds grande.

5.1 Vorticidade e Circulação da velocidade.

Define-se a **vorticidade** como $\vec{\zeta}(\vec{r}) \equiv \frac{1}{2} \nabla \times \vec{v}(\vec{r})$.

Quando o número de Reynolds é relativamente grande a vorticidade não é criada ou destruida dentro de um fluido homogêneo e baratrópico; a vorticidade é criada sòmente nas superfícies de descontinuidade ou de contacto com corpos sólidos.

Sòmente nestes casos, pode haver um escoamento potencial, longe das superfícies de descontinuidade.

É interessante obter uma equação que descreve a evolução da vorticidade, ao invés de se usar diretamente a equação de Navier-Stokes.

Definimos as **linhas de vórtice** como sendo curvas tangentes a $\vec{\zeta}(\vec{r})$ em cada ponto e **tubos de vórtice** formados por linhas de vórtice. A linha de vórtice dá em cada ponto a direção do eixo de rotação.

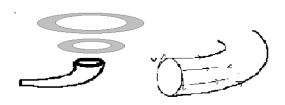
É importante observar que

$$2\nabla \cdot \vec{\zeta}(\vec{r}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}(\vec{r})) \equiv 0.$$

Os vetores com divergente zero (rotacional de um vetor) são chamados vetores **solenoidais**. Os mais conhecidos são o vetor velocidade de escoamento incompressível e o vetor indução magnética \vec{B} .

As linhas de vórtice formam uma estrutura muito semelhante às de linhas de campo magnético: ou são curvas fechadas ou terminam numa superficie livre ou num contorno.

Um exemplo de linhas de vórtice são os anéis de fumaça produzidos por um cachimbo.

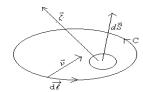


67

Definimos a grandeza **circulação** da velocidade ao longo de uma $curva\ fechada\ C$ como

$$\Gamma \equiv \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell}.$$

Quando a função \vec{v} estiver <u>definida</u> numa região S dentro do contôrno C (região simplesmente conexa) podemos usar o teorema de Stokes para obter



$$\Gamma = \int_{S} d\vec{S} \cdot \nabla \times \vec{v} \equiv \int_{S} d\vec{S} \cdot 2\vec{\zeta}.$$

Portanto $\Gamma/2$ é igual ao fluxo da vorticidade através de S.

Em movimentos como da água quando uma pia é esvaziada, ou de tornados, a velocidade não está definida no centro. A vorticidade pode ser aproximadamente nula na região e no entanto a circulação ser não nula, isto é, há um vórtice.

Teorema 5.1 A circulação da velocidade ao longo de qualquer secção transversal de um mesmo tubo de vórtice é a mesma.



A demonstração é feita integrando a equação $\nabla \cdot \vec{\zeta} = 0$ num volume de controle V_0 , no interior de um tubo de vórtice (num dado instante), limitado por duas secções transversais S_1 e S_2 e pela superficie lateral (S_ℓ) .

5.2 Equação de transporte de vorticidade

Uma equação para a vorticidade pode ser obtida tomando o rotacional da equação de Navier-Stokes.

Considerando

$$\vec{f^V} = \overrightarrow{g}_{ef} - 2 \overrightarrow{\Omega}_{vert} \times \vec{v} \equiv -\nabla \Phi - 2 \overrightarrow{\Omega}_{vert} \times \vec{v},$$

a equação a ser usada será 3-26

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \equiv \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}
= -\frac{\nabla P}{\rho} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'} - \nabla \Phi - 2 \overrightarrow{\Omega}_{vert} \times \vec{v},
\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'} = \nu \nabla^2 \vec{v} + \nu \left(\frac{1}{3} + \frac{\zeta}{\eta}\right) \nabla (\nabla \cdot \vec{v}).$$
(5-1)

Como $\nabla\times(\nabla\times\vec{v})\equiv\nabla(\nabla\cdot\vec{v})-\nabla^2\vec{v}$ podemos escrever

$$\nabla^2 \vec{v} = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - 2\nabla \times \vec{\zeta}.$$

Tomando o rotacional da expressão 5-1 ficamos com

$$\frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\zeta} \times \vec{v}) = -\frac{1}{2} \nabla \times \frac{\nabla P}{\rho} - \nu \nabla \times (\nabla \times \vec{\zeta}) - \nabla \times \overrightarrow{\Omega}_{vert} \times \vec{v}.$$

Nos casos em que 1

¹Condição verificada em alguns casos importantes:

$$\nabla \times \frac{\nabla P}{\rho} = 0 \tag{5-2}$$

temos

$$\frac{\partial \vec{\zeta}}{\partial t} + \nabla \times \left[\left(\vec{\zeta} + \overrightarrow{\Omega}_{vert} \right) \times \vec{v} \right] = -\nu \nabla \times \left(\nabla \times \vec{\zeta} \right).$$

Se chamarmos

$$\vec{\zeta}_T \equiv \vec{\zeta} + \overrightarrow{\Omega}_{vert}$$

de vorticidade total e fizermos

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{\zeta}\right) = \nabla(\nabla \cdot \vec{\zeta}) - \nabla^2 \vec{\zeta} = -\nabla^2 \vec{\zeta}$$

obtemos

$$\frac{\partial \vec{\zeta_T}}{\partial t} + \nabla \times \left(\vec{\zeta_T} \times \vec{v} \right) = \nu \nabla^2 \vec{\zeta_T}. \tag{5-3}$$

Usando ainda a relação vetorial

em 5-3:

$$\frac{\partial \vec{\zeta_T}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{\zeta_T} = \frac{D\vec{\zeta_T}}{Dt} = \nu \nabla^2 \vec{\zeta_T} - \vec{\zeta_T} (\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{\zeta_T} \cdot \nabla \vec{v} \tag{5-4}$$

Esta equação descreve o transporte de vorticidade.

A primeira vantagem desta equação é que ela não contém a pressão (ou a densidade).

- O primeiro membro representa a razão de variação da vorticidade.
 No 2o. membro,
- o 1o. têrmo é a difusão de vorticidade devida a viscosidade. A vorticidade está relacionada com o momento angular; o momento angular varia devido ao torque das forças tangenciais, de viscosidade;
- o 2o. têrmo está relacionado com a expansão do elemento de fluido. Uma compressão ou expansão não faz variar o momento angular mas sim o momento de inércia. Disto resulta uma contribuição para a mudança da velocidade angular de rotação.
- o 3o. têrmo está relacionado com a deformação do elemento de fluido, que também pode mudar o momento de inércia.
- 1. Escoamento incompressível: $\nabla \times (\nabla P)/\rho = \nabla \times \nabla (P/\rho) \equiv 0$.
- 2. Escoamento baratrópico (A densidade pode ser escrita como uma função só da pressão: $\rho(P)$) $\Rightarrow dP/\rho = d[\int dP/\rho(P)] \quad e \quad \nabla P/\rho = \nabla[\int dP/\rho(P)]$ que é irrotacional.

5.3 Vorticidade de fluidos ideais.

Se o fluido for sem viscosidade (ideal) e incompressível a equação de vorticidade fica

$$\frac{\partial \vec{\zeta_T}}{\partial t} + \nabla \times \left(\vec{\zeta_T} \times \vec{v} \right) = \frac{D\vec{\zeta_T}}{Dt} - \vec{\zeta_T} \cdot \nabla \vec{v} = 0.$$
(5-5)

- Se num certo instante $\vec{\zeta_T} = 0$ em todos os pontos, então, pela equação (5-5), $D\vec{\zeta_T}/Dt = 0$, e portanto $\vec{\zeta_T} \equiv 0$ sempre.
- Se o escoamento for bidimensional, $\vec{\zeta_T}$ é perpendicular a \vec{v} e ao plano do escoamento e portanto $\vec{\zeta_T} \cdot \nabla \vec{v} = 0$ e $D\vec{\zeta_T}/Dt = 0$.

Haverá conservação de vorticidade.

Na atmosfera terrestre a vorticidade é persistente. Ciclones e furações podem durar vários dias.

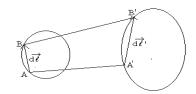
Mas o modêlo do fluido ideal não explica o surgimento da maioria dos vórtices observados na natureza.

Teorema 5.2 (Teorema de Thomson) (ou da conservação da circulação da velocidade). Num fluido <u>sem viscosidade</u> (<u>ideal</u>) e <u>baratrópico</u>, a circulação da velocidade num circuito fechado formado por partículas do fluido², se conserva, isto é,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0.$$

Demonstração. No instante t, $\Gamma \equiv \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell}$. Sejam A e B as extremidades do elemento de curva $d\vec{\ell}$, na curva C, com os vetores de posição \vec{r}_A e \vec{r}_B , respectivamente. Durante um intervalo de tempo Δt o ponto A vai se deslocar, com velocidade $\vec{v} \equiv \vec{v}(\vec{r}_A,t)$ para $\vec{r}_{A'} \simeq \vec{r}_A + \vec{v}\Delta t$.

Como a velocidade do ponto B é $\vec{v}(\vec{r}_B,t) = \vec{v}(\vec{r}_A + d\vec{\ell},t) \simeq \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \ell} d\ell$, êle vai se deslocar para



$$ec{r}_{B'} \simeq ec{r}_B + \left(ec{v} + rac{\partial ec{v}}{\partial \ell} d\ell
ight) \Delta t.$$

O novo elemento de linha vai ser $d\vec{\ell}' \equiv \vec{r}_{B'} - \vec{r}_{A'}$, tal que

$$(\vec{r_A'} - \vec{r_A}) + (\vec{r_B'} - \vec{r_A'}) = (\vec{r_B} - \vec{r_A}) + (\vec{r_B'} - \vec{r_B})$$

e portanto

$$\vec{v}\Delta t + d\vec{\ell}' \simeq d\vec{\ell} + \left(\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \ell} d\ell\right) \Delta t \Rightarrow d\vec{\ell}' \simeq d\vec{\ell} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \ell} d\ell \Delta t.$$

A velocidade de cada ponto do elemento da curva, no instante $t + \Delta t$, vai ser

$$\vec{v'} \simeq \vec{v} + \frac{D\vec{v}}{Dt}\Delta t.$$

²Calculada acompanhando o movimento do circuito.

Portanto

$$\begin{split} \frac{d\Gamma}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\sum_{C'} \vec{v'} \cdot d\vec{\ell'} - \sum_{C} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} \right] \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \sum_{C} \left[\left(\vec{v} + \frac{D\vec{v}}{Dt} \Delta t \right) \cdot \left(d\vec{\ell} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial \ell} d\ell \Delta t \right) - \vec{v} \cdot d\vec{\ell} \right] \\ &= \oint_{C} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \ell} d\ell + \oint_{C} \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \oint_{C} \frac{1}{2} dv^{2} + \oint_{C} \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{\ell}. \end{split}$$

Obviamente a primeira integral se anula se a velocidade for contínua. Da equação de Euler, seque-se que

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} \equiv \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \Phi,$$

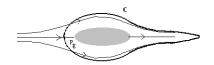
e

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_C \left(-\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \Phi \right) \cdot d\vec{\ell}
= \int_S d\vec{S} \cdot \nabla \times \left(-\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \Phi \right),$$
(5-6)

onde S é a superficie interior a C. A última igualdade decorre do teorema de Stokes. Esta expressão é nula se $\nabla P/\rho$ puder ser escrita como gradiente de uma função, o que acontece nos casos citados na secção anterior, c. q. d.

Portanto, se um fluido ideal está inicialmente em repouso e não houver nenhum outro tipo de força externa que não seja derivada de um potencial (como a força gravitacional) o escoamento vai permanecer irrotacional.

A aplicabilidade do teorema tem limitações, quando algum corpo está imerso no fluido. Consideremos um corpo sólido imerso num fluido de baixa viscosidade, inicialmente em repouso. Portanto, inicialmente \vec{v} e $\vec{\zeta}$ são nulos e a circulação em torno de qualquer circuito é nula. Pelo teorema de Thomson a circulação em torno de qualquer circuito fechado que se move com o fluido se conserva ao longo do movimento do circuito.



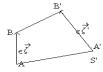
Consideremos um circuito fechado em torno do corpo (C), que cruza com uma linha de escoamento, que acaba num ponto de estagnação, como mostra a figura. Esta curva conterá sempre o corpo: à medida que o fluido escoa a curva se deforma e cresce atrás do corpo. As linhas de corrente que haviam se separado, na frente do corpo, confluem novamente atrás do corpo, onde surgem superficies de descontinuidade. A velocidade de um fluido real em contacto com uma superficie sólida é nula e cresce a medida que se afasta da mesma; isto resulta numa vorticidade na vizinhança de qualquer corpo sólido. Esta vorticidade pode ser difundida pela viscosidade.

Não é possível usar o teorema de Stokes para relacionar o valor da circulação com a vorticidade na vizinhança imediata do corpo. (Ref. [2, 4, 5, 7, 8, 9, 3].)

Teorema 5.3 (Teorema de Helmoltz) ³. No trabalho original de Helmoltz o enunciado é: Se um fluido <u>sem viscosidade</u> (perfeito) e incompressível se move num campo de forças,

- 1. se inicialmente o escoamento for irrotacional, êle se mantém irrotacional;
- 2. as partículas que num certo instante estão sôbre uma linha de vórtice, se mantêm sôbre a mesma linha de vórtice (um tubo de vórtice se move com o fluido);
- 3. o produto da vorticidade pela área de uma secção transversal de um filamento de vórtice (tubo fino) tem o mesmo valor ao longo de todo o filamento e permanece constante no tempo. Os filamentos são portanto ou tubos fechados ou terminam na superficie de contorno do fluido.

Considere 2 pontos A e B, vizinhos numa linha de vórtice, nas posições \vec{r}_A e \vec{r}_B . Podemos escrever $\vec{r}_B - \vec{r}_A \equiv \epsilon \vec{\zeta}$ pois é paralela a $\vec{\zeta}$. Durante um intervalo de tempo Δt o ponto A vai se deslocar, com velocidade $\vec{v} \equiv \vec{v}(\vec{r_A},t)$ para $\vec{r}_{A'} = \vec{r}_A + \vec{v}\Delta t$. Como a velocidade do ponto B é $\vec{v}(\vec{r}_B,t) = \vec{v}(\vec{r}_A + \epsilon \vec{\zeta},t) \simeq \vec{v} + \epsilon \vec{\zeta} \cdot \nabla \vec{v}$, êle vai se deslocar para



$$\vec{r}_{B'} = \vec{r}_B + (\vec{v} + \epsilon \vec{\zeta} \cdot \nabla \vec{v}) \Delta t.$$

Consideremos escoamentos de fluidos em que $\nabla \times \nabla P/\rho = 0$. Vale, portanto a equação 5-5.

$$\frac{\partial \vec{\zeta_T}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{\zeta_T} = \frac{D \vec{\zeta_T}}{D t} = \vec{\zeta_T} \cdot \nabla \vec{v}.$$

Se $\vec{\zeta_T} \equiv 0$ no instante t = 0, $\partial \vec{\zeta_T}/\partial t \equiv 0$ e, em todos os instantes subsequentes $\vec{\zeta_T}$ será zero. O teorema é válido para a vorticidade total, na superficie terrestre, incluindo a velocidade de rotação da Terra. Neste caso é chamado **teorema de Bjerknes**.

O teorema de Helmoltz diz respeito à vorticidade propriamente dito.

Omitiremos o índice T para a vorticidade total.

Na posição A',

$$\vec{\zeta'} \simeq \vec{\zeta} + \frac{D\vec{\zeta}}{Dt} \Delta t = \vec{\zeta} + \vec{\zeta} \cdot \nabla \vec{v} \Delta t$$

 \mathbf{e}

$$\vec{r}_{B'} - \vec{r}_{A'} = \vec{r}_B - \vec{r}_A + \epsilon \vec{\zeta} \cdot \nabla \vec{v} \Delta t$$

$$= \epsilon \vec{\zeta} + \epsilon \vec{\zeta} \cdot \nabla \vec{v} \Delta t$$

$$= \epsilon (\vec{\zeta} + \vec{\zeta} \cdot \nabla \vec{v} \Delta t)$$

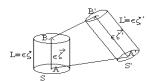
$$= \epsilon \vec{\zeta}^{\dagger}$$

e os dois pontos estarão sôbre a nova linha de vórtice $\bar{\zeta}'$.

Sendo o fluido incompressível, um elemento do fluido contido num cilindro de secção S e altura $\epsilon\zeta$ no instante t estará contido num cilindro de área S' e altura $\epsilon\zeta'$ de mesmo volume. Portanto

$$S\epsilon\zeta = S'\epsilon\zeta'$$
 e $S\zeta = S'\zeta' = \frac{1}{2} \oint \vec{v} \cdot d\vec{\ell}$

O fluxo da vorticidade através da base (circulação no contôrno) se mantém.



³Extraido do livro[7] L. Prandtl & O. G. Tietjens - Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics, vol.I, Dover Publications, Inc., New York, 1934.

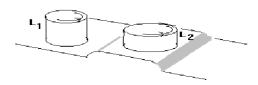
c. q. d.

Este teorema é mais limitado que o teorema de Thomson pois foi assumida a $\underline{\text{incompressibilidade}}$ do fluido.

Corolário 5.1 Se um pedaço de um filamento de vorticidade correspondente a vorticidade ζ tem altura $L \equiv \epsilon \zeta$ a relação ζ/L se mantém com o tempo em fluidos ideais:

$$\frac{\zeta}{L} = constante.$$

Exemplo 5.1 ⁴ Considere o escoamento de água num canal com leito irregular como mostra a figura. Como fica o segmento de um tubo de vorticidade quando sobe uma rampa?



O volume do vórtice se mantém e também a circulação, de modo que,

$$\frac{\zeta_1}{L_1} = \frac{\zeta_2}{L_2}.$$

A vorticidade deve diminuir onde o canal é mais raso.

Resumo

- Vorticidade $\vec{\zeta} \equiv \nabla \times \vec{v}/2$
- $\bullet \ \nabla \cdot \vec{\zeta} = 0$
- linhas de vórtice: curvas tangentes a $\vec{\zeta}(\vec{r})$ em cada ponto
- tubos de vórtice: tubos formados por linhas de vórtice.
- ullet Circulação da velocidade ao longo de uma curva fechada C

$$\Gamma \equiv \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_S d\vec{S} \cdot \nabla \times \vec{v} \equiv \int_S d\vec{S} \cdot 2\vec{\zeta}.$$

Portanto Γ é $2\times$ o fluxo da vorticidade.

- Teorema: A circulação da velocidade ao longo de qualquer secção transversal de um mesmo tubo de vórtice é a mesma.
- Equação de transporte de vorticidade

$$\begin{split} \frac{\partial \vec{\zeta_T}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{\zeta_T} &= \frac{D \vec{\zeta_T}}{Dt} \\ &= \nu \nabla^2 \vec{\zeta_T} - \vec{\zeta_T} (\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{\zeta_T} \cdot \nabla \vec{v}. \end{split}$$

⁴Extraído do livro [1]: R. A. Brown - Fluid Mechanics of the Atmosphere Academic Press, Inc.,1991.

- Se o escoamento for sem viscosidade, bidimensional ($\Rightarrow \vec{\zeta_T}$ é perpendicular a $\vec{\zeta_T} \Rightarrow \vec{\zeta_T} \cdot \nabla \vec{v} = 0$;) e incompressível ($\Rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0$) $\vec{\zeta_T}$ se conserva ao longo do escoamento.
- Se um fluido é perfeito, isto é, sem viscosidade e incompressível, as partículas que num certo instante estão sôbre uma linha de vórtice, se mantêm sôbre a mesma linha de vórtice. Portanto um segmento de tubo de vorticidade se move com o fluido e contém sempre o mesmo material.
- Se um pedaço de um tubo de vorticidade correspondente a vorticidade ζ tem altura L a relação ζ/L se mantém com o tempo em fluidos não viscosos. Se o fluido é incompressível, o volume do tubo se mantém: $S \times L = constante$. O fluxo da vorticidade através da base S (circulação no contôrno) também se mantém: $\zeta \times S = constante$. Portanto

$$\frac{\zeta}{L} = constante.$$

Problema

Vorticidade $\overrightarrow{\zeta} \equiv \nabla \times \overrightarrow{v}/2$

- 1. $\nabla \cdot \overrightarrow{\zeta} = 0$
- 2. linhas de vórtice: curvas tangentes a $\overrightarrow{\zeta}(\vec{r})$ em cada ponto
- 3. tubos de vórtice: tubos formados por linhas de vórtice.
- 4. Circulação da velocidade ao longo de uma curva fechada ${\cal C}$

$$\Gamma \equiv \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \int_S d\vec{S} \cdot \nabla \times \vec{v} \equiv \int_S d\vec{S} \cdot 2\vec{\zeta}.$$

Portanto Γ é $2\times$ o fluxo da vorticidade.

- 5. Teorema: A circulação da velocidade ao longo de qualquer secção transversal de um mesmo tubo de vórtice é a mesma.
- 6. Equação de transporte de vorticidade

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial \overrightarrow{\zeta_T}}{\partial t} + \overrightarrow{v} \cdot \nabla \overrightarrow{\zeta_T} & = & \frac{D \overrightarrow{\zeta_T}}{Dt} \\ & = & \nu \nabla^2 \overrightarrow{\zeta} - \overrightarrow{\zeta_T} (\nabla \cdot \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{\zeta_T} \cdot \nabla \overrightarrow{v}. \end{array}$$

7. Se o escoamento for sem viscosidade,

bidimensional ($\Rightarrow \overrightarrow{\zeta_T}$ é perpendicular a $\overrightarrow{v} \Rightarrow \overrightarrow{\zeta_T} \cdot \nabla \overrightarrow{v} = 0$;)

e incompressível $(\Rightarrow \nabla \cdot \overrightarrow{v} = 0)$

 $\overrightarrow{\zeta_T}$ se conserva ao longo do escoamento.

- 8. Se um fluido é perfeito, isto é, sem viscosidade e incompressível, as partículas que num certo instante estão sôbre uma linha de vórtice, se mantêm sôbre a mesma linha de vórtice. Portanto um segmento de tubo de vorticidade se move com o fluido e contém sempre o mesmo material.
- 9. Se um pedaço de um tubo de vorticidade correspondente a vorticidade ζ tem altura L a relação ζ/L se mantém com o tempo em fluidos ideais. Se o fluido é incompressível, o volume do tubo se mantém: $S \times L = constante$. O fluxo da vorticidade através da base S (circulação no contôrno) também se mantém: $\zeta \times S = constante$. Portanto

$$\frac{\zeta}{L} = constante.$$

QUESTÃO. Se o fluido tiver velocidade de escoamento solenoidal, isto é, $\overrightarrow{v} = \nabla \times \overrightarrow{A}$ pode-se fazer uma analogia entre o vetor velocidade e o vetor vorticidade.

Para as definições dadas acima, relacionadas à vorticidade, encontre as correpondentes relacionadas à velocidade.

 $Que \ a firmações \ podem \ ser \ feitas \ para \ a \ velocidade, \ correspodentes \ \grave{a}s \ feitas \ acima \ para \ a \ vorticidade?$

Exemplo: 1. $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.

Capítulo 6

Escoamento potencial.

A equação de Navier-Stokes junto com as equações de conservação de massa, de energia e a equação de estado podem, em princípio, descrever completamente o escoamento de um fluido. Na realidade êste conjunto de equações é altamente não linear e complexo na maioria das vêzes e o tratamento matemático é extremamente difícil.

Conforme visto em (3.1.2), a velocidade pode ser escrita como uma soma vetorial de três componentes:

- velocidade de translação uniforme $\overrightarrow{v_t}$,
- velocidade de rotação pura $\overrightarrow{v_r}$
- e velocidade de deformação $\overrightarrow{v_d}$.

Matemàticamente podemos escrever

$$\nabla \cdot \vec{v_t} = 0 \qquad \qquad e \quad \nabla \times \vec{v_t} = 0 \qquad \qquad \Rightarrow \vec{v_t} = \nabla \varphi ; \nabla^2 \varphi = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{v_r} = 0 \text{ (solenoidal)} \qquad e \quad \nabla \times \vec{v_r} = 2\vec{\zeta} \qquad \qquad \Rightarrow \vec{v_r} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \cdot \vec{v_d} = \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \neq 0 \qquad e \quad \nabla \times \vec{v_d} = 0 \text{ (irrotacional ou potencial)} \qquad \Rightarrow \vec{v_d} = \nabla \varphi.$$

As soluções analíticas podem ser obtidas em alguns casos simples como de fluidos incompressíveis $(\nabla \cdot \vec{v} = 0)$ ou irrotacionais $(\nabla \times \vec{v})$, definindo a velocidade em têrmos de um potencial escalar ou vetorial.

Na realidade, um escoamento é raramente irrotacional pois a conservação da circulação é constantemente violada.

O chamado fluido ideal (sem viscosidade) é apenas uma abstração. Na melhor das hipóteses é uma aproximação que pode ser razoável quando a viscosidade for pequena mas não nula, quando a camada limite formada perto de corpos sólidos é pequena e permanece em contato com os corpos. Quando a camada se desprega da superficie sólida e os vórtices começam a se soltar formando a esteira de vórtices de von Karman, os resultados obtidos usando a equação de Euler estão completamete errados.

Um outro exemplo da falha do modêlo de fluido ideal: usando a equação de Euler para calcular a força com que uma esfera sólida é arrastada por uma correnteza obtemos valor zero

(paradoxo de D'Alembert). Todos os problemas ligados à resitência do meio só podem ser analisados usando a equação completa de Navier-Stokes.

Apesar das restrições, os resultados da equação de Euler ainda são importantes devido a simplicidade.

6.1 Escoamento incompressível bi-dimensional.

Se $\nabla \cdot \overrightarrow{v} = 0$ pode-se definir um potencial vetorial \overrightarrow{A} tal que $\overrightarrow{v} = \nabla \times \overrightarrow{A}$.

Podemos definir como escoamento bidimensional aquele que pode ser descrito por sòmente duas coordenadas espaciais por ter algum tipo de simetria

Se o escoamento for bi-dimensional pode-se escrever $\overrightarrow{A} = \Psi \overrightarrow{ez}$ onde Ψ é um escalar, relacionado com o fluxo, e \overrightarrow{ez} é o versor perpendicular ao plano do escoamento.

Demonstração.

A equação de uma linha de corrente é

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \Rightarrow v_y dx - v_x dy = 0. \tag{6-1}$$

Como o fluido é incompressível

$$\nabla \cdot \overrightarrow{v} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x}.$$

Portanto deve existir uma função Ψ tal que

$$v_y = \frac{\partial \Psi}{\partial x}; \quad -v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}.$$

A equação 6-1 fica $d\Psi \equiv (\partial\Psi/\partial x)dx + (\partial\Psi/\partial y)dy = 0$. Vetorialmente, pode-se escrever

$$\vec{v} = \nabla \Psi \times \overrightarrow{e_z} = \nabla \times \overrightarrow{A};$$

$$\overrightarrow{A} \equiv \Psi \overrightarrow{e_z}.$$
(6-2)

c.q.d.

A equação $d\Psi=0$ contém as linhas de velocidade. Portanto a equação de superfície $\Psi(\overrightarrow{r},t)=C(t)$, onde C(t) não depende da posição, é formada por linhas de velocidade, em cada instante. Esta é uma forma muito interessante de visualizar o campo de escoamento.

Corolário 6.1 $\vec{v} \cdot \nabla \Psi = 0$.

Exemplo 6.1 A velocidade de escoamento de um fluido é dada por

$$\overrightarrow{v} = -\frac{Cy}{r^2}\overrightarrow{i} + \frac{Cx}{r^2}\overrightarrow{j} \;\; ; \;\; r^2 \equiv x^2 + y^2 \;\; ; \;\; C > 0. \label{eq:variance}$$

Como são as linhas de corrente?

 $\nabla \cdot \overrightarrow{v} = 0$. Portanto existe Ψ tal que

$$\overrightarrow{v} = \nabla \Psi \times \overrightarrow{k} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \overrightarrow{j} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \overrightarrow{i}.$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{Cy}{r^2} \Rightarrow \Psi = -\frac{C}{2} \ln r^2 + f(x)$$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{Cx}{r^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = cons \tan te.$$

Na fórmula da velocidade entra sòmente $\nabla \Psi$ e não Ψ . Portanto qualquer constante aditiva em Ψ não altera o resultado físico e portanto $\Psi = -C \ln r$.

As linhas de corrente são dadas por $\Psi=\cos \tan t e$, ou $r=\cos \tan t e$. No caso são circunferências com o centro na origem ou melhor, superfícies cilíndricas. A velocidade no ponto $(x,y)\equiv (0,1)$ é $(v_x,v_y)=(-C,0)$. Portanto o sentido do escoamento deve ser anti horário.



A velocidade pode ser escrita, em coordenadas polares no plano como

$$\overrightarrow{v} = -\frac{C}{r}\overrightarrow{e_r} \times \overrightarrow{k} = \frac{C}{r}\overrightarrow{e_\theta} \equiv v_\theta \overrightarrow{e_\theta}.$$

 \acute{E} a velocidade de um vórtice livre, visto no exemplo (1.12).

A expressão 6-1 pode ser usada diretamente para determinar as linhas de corrente:

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \Rightarrow \frac{dx}{-Cy/r^2} = \frac{dy}{Cx/r^2}.$$

A vorticidade é nula mas há um vórtice em tôrno da origem. A vorticidade deve ser infinita na origem. Devemos ter, em volta da origem

$$\Gamma \equiv \oint \overrightarrow{v} \cdot d\overrightarrow{r} = \oint \frac{C}{r} r d\theta = 2\pi C.$$

6.1.1 Equação diferencial para $\Psi(\vec{r},t)$.

Um vetor está completamente definido se conhecidos o seu divergente, o seu rotacional e algumas condições de contôrno. Portanto, no caso do campo solenoidal bi-dimensional basta conhecer a vorticidade:

$$\overrightarrow{\zeta} \equiv \frac{1}{2} \nabla \times \overrightarrow{v} = \frac{1}{2} \nabla \times (\nabla \Psi \times \overrightarrow{e_z}) = -\frac{1}{2} \nabla^2 \Psi \overrightarrow{e_z}. \tag{6-3}$$

Para escrever a equação para Ψ podemos usar a equação para a vorticidade 5-4 deduzida no capítulo 5.

Não vamos considerar aqui a força de Coriolis.

A equação do transporte de vorticidade pode então ser escrita em têrmos de Ψ como

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi - \left(\nabla \Psi \times \nabla \nabla^2 \Psi \right) \cdot \overrightarrow{e_z} = \nu \nabla^4 \Psi \tag{6-4}$$

que contém um têrmo do 40. grau devido a viscosidade.

A vorticidade não se conserva num fluido viscoso bi-dimensional.

6.2 Escoamento potencial.

Quando o fluido não tem vorticidade $(\nabla \times \vec{v} = 0)$ diz-se que o escoamento é irrotacional ou potencial pois é possível introduzir uma função potencial escalar $\varphi(\vec{r}, t)$ tal que

$$\vec{v}(\vec{r},t) \equiv \nabla \varphi(\vec{r},t).$$

Segundo o modelo de fluidos ideais, se um escoamento inicialmente não apresentar vorticidade, êle continua irrotacional. Em fluidos reais, um escoamento potencial poderia ser uma descrição aproximada, fora das camadas limites formadas próximo a corpos sólidos imersos.

Corolário 6.2 Num escoamento potencial, incompressível e bi-dimensional, as curvas $\Psi = const$ e as curvas $\varphi = const$ são ortogonais entre si.

Demonstração: $\vec{v}(\vec{r},t) \equiv \nabla \varphi(\vec{r},t) \Longrightarrow \vec{v}(\vec{r},t)$ é normal à superficie $\varphi = const.$ As linhas paralelas a $\vec{v}(\vec{r},t)$ estão contidas numa superfície $\Psi = constante$.

Exemplo 6.2 No escoamento do exemplo 6.1 podemos calcular o potencial pois $\nabla \times \overrightarrow{v} = 0$.

$$\overrightarrow{v} = \frac{C}{r}\overrightarrow{e_{\theta}} = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\overrightarrow{e_{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\overrightarrow{e_{\theta}}$$
$$\Rightarrow \varphi = C\theta.$$

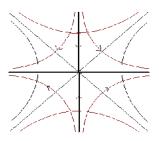
Exemplo 6.3 Considere o potencial de velocidade $\varphi \equiv C(x^2 - y^2)$. Determine a velocidade, as equipotenciais e as linhas de fluxo, $\Psi = cons \tan te$.

$$\overrightarrow{v} = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \overrightarrow{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \overrightarrow{j} = 2Cx \overrightarrow{i} - 2Cy \overrightarrow{j}.$$

$$\overrightarrow{v} = \nabla \Psi \times \overrightarrow{k} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \overrightarrow{j} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \overrightarrow{i}$$

$$\Rightarrow \Psi = 2Cxy$$

As equipotenciais e as linhas de corrente são hipérboles ortogonais entre si.



6.2.1 Equações diferenciais para o potencial $\varphi(\vec{r},t)$ e pressão $P(\vec{r},t)$.

Fazendo $\vec{v} \equiv \nabla \varphi$ na equação do momento linear (de Euler) e assumindo que $\rho = \rho(P)$, de modo que $\nabla P/\rho = \nabla \int dP/\rho$, obtemos

$$\frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} + \nabla \int \frac{dP}{\rho} + \nabla \Phi = 0$$

ou

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho} + \Phi \right) = 0.$$

 Φ é a energia potencial gravitacional por unidade de massa.

Portanto

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho} + \Phi = c(t) \; \; ; \quad \; \vec{v} \equiv \nabla \varphi. \label{eq:phi}$$

c(t) é uma função arbitrária de t, independente da posição.

Este resultado é uma generalização do teorema de Bernouilli:

Teorema 6.1 (Teorema de Bernouilli generalizado:) para um escoamento irrotacional, com viscosidade d

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \int \frac{dP}{\rho} + \Phi = c(t) \quad : \quad (equação \ de \ Bernouilli \ generalizada)$$
 (6-5)

A igualdade não está restrito a pontos ao longo de uma linha de corrente; ela se estende a toda a região do escoamento.

Uma outra equação pode ser deduzida da equação da continuidade substituindo \vec{v} por $\nabla \varphi$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \nabla \varphi) = 0 \qquad \text{(equação de continuidade generalizada)}. \tag{6-6}$$

Temos duas equações, acopladas, para φ e P (ou ρ , se for possível escrever ρ como função de P), que apresentam soluções únicas para dadas condições iniciais (valores de φ e ρ num dado instante) e condições de contorno.

As condições de contorno para o potencial φ na superficie de contacto com um sólido são obtidas de

$$(\vec{v} - \vec{v_S}) \cdot \vec{n} = 0,$$

onde $\vec{v_S}$ é a velocidade do ponto da superficie do sólido e \vec{n} é a normal à superficie. O fluido não penetra no sólido, nem há formação de vácuo.

Como

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \nabla \varphi \cdot \vec{n} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

a condição de contorno fica

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \vec{v_S} \cdot \vec{n}. \tag{6-7}$$

Não havendo forças viscosas (tangenciais) a velocidade tangencial pode ser qualquer.

Na superficie de separação de dois fluidos (1 e 2), deve haver continuidade da velocidade normal, se não houver interpenetração dos fluidos ou formação de cavidades, e continuidade da pressão:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_1 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_2 \qquad e \qquad P_1 = P_2. \tag{6-8}$$

6.3 Fluido incompressível e irrotacional.

Neste caso temos para a velocidade

$$\nabla \times \vec{v} = 0$$
 e $\nabla \cdot \vec{v} = 0$,

portanto, equações desvinculadas da pressão.

Este sistema de equações é o mesmo para o campo elétrico numa região, sem carga, de um sistema estático

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$
 e $\nabla \cdot \vec{E} = 0$

ou para o campo magnético de um sistema estático numa região sem corrente

$$\nabla \times \vec{B} = 0$$
 e $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.

Todos podem ser escritos, definindo-se um potencial escalar, como equação de Laplace

$$\nabla^2 \varphi = 0. \tag{6-9}$$

Podemos usar os mesmos métodos matemáticos para obter a solução, como por exemplo o método de separação de variáveis, método de transformação conforme de funções analíticas em casos bidimensionais etc. Se as condições de contorno do tipo (6-9) são conhecidas, a velocidade não depende da equação de Euler.

A outra equação de movimento, a de Euler, ou a de Bernouilli generalizada (6-5), pode ser usada para determinar a pressão. Ela é bastante simples no caso em que ρ é independente do tempo e da posição:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + \Phi = c(t) \tag{6-10}$$

Quando o fluido é incompressível e ainda, o escoamento é bi-dimensional $(\vec{v} = \nabla \Psi \times \vec{e_z})$ e irrotacional $(\vec{v} \equiv \nabla \varphi)$, Ψ e φ satisfazem a equação de Laplace

$$\nabla^2 \Psi = 0 \quad \text{e} \quad \nabla^2 \varphi = 0.$$

Uma função complexa definida por

$$\Omega \equiv \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

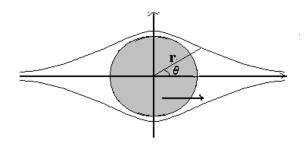
é analítica e é chamada função potencial complexo. Pode-se considerar que toda função analítica de $z \equiv x + iy$ representa um campo de escoamento de um certo fluido. A parte real seria o potencial e a parte imaginária a função de fluxo. Obviamente, nem todas as funções anlíticas representam escoamentos, fisicamente interessantes.

Uma forma interessante de se estudar o problema é usando a teoria de transformações conformes de funções analíticas[7, 2, 3].

Exemplo 6.4 (Esfera movendo num fluido ideal) A esfera se move com velocidade $\vec{v_0}(t)$ dentro de um fluido em repouso.

O sistema pode ser descrito usando coordenadas polares esféricas com origem no centro da esfera e eixo z na direção e sentido de $\vec{v_0}$. Como há simetria azimutal todas as grandezas físicas

só dependem das coordenadas r e θ e a solução mais geral possível da equação de Laplace (6-9) pode ser determinada usando o método de separação de variáveis como



$$\varphi = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-(\ell+1)} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$
(6-11)

onde $P_{\ell}(x)$ são funções especiais chamadas polinômios de Legendre. Os polinômios de Legendre são linearmente independentes entre si.

$$P_0(x) = 1$$
; $P_1(x) = x$; $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2...$

As constantes A_{ℓ} e B_{ℓ} são determinadas de acôrdo com as condições de contôrno sôbre a velocidade. A velocidade da esfera é $v_0(t)\vec{k}$, onde \vec{k} é o versor na direção z. A velocidade do fluido é dada por

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\ell A_{\ell} r^{\ell-1} - (\ell+1) B_{\ell} r^{-(\ell+2)} \right) P_{\ell}(\cos \theta))$$

$$v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell-1} + B_{\ell} r^{-(\ell+2)} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} P_{\ell}(\cos \theta).$$

No infinito o escoamento não é perturbado pela esfera. O fluido deve estar parado.

Sôbre a superfície esférica, a componente normal da velocidade deve ser a mesma que a da esfera.

Portanto as condições de contorno devem ser

$$\lim_{r \to \infty} v_r(r, \theta) = 0 \tag{6-12}$$

$$\lim_{r \to \infty} v_{\theta}(r, \theta) = 0 \tag{6-13}$$

$$e v_r(a,\theta) = v_0(t)\cos\theta. \tag{6-14}$$

Usando (6-12) temos

$$\lim_{r \to \infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell A_{\ell} r^{\ell-1} P_{\ell}(\cos \theta) = 0.$$

¹ Êste método é explicado na maioria dos livros elementares de Física Matemática.

 $A_{\ell}=0$ para $\ell\neq 0$. O valor de A_0 não entra na expressão de \vec{v} de modo que podemos considerar θ .

(6-13) é satisfeita automaticamente.

Usando (6-14) temos

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} -(\ell+1)B_{\ell}a^{-(\ell+2)}P_{\ell}(\cos\theta) = v_0(t)\cos\theta$$

e portanto $B_1 = -\frac{1}{2}a^3v_0(t)$.

Portanto, para uma esfera se movendo com velocidade $\vec{v_0}(t)$ num fluido parado, a velocidade seria dada por:

$$v_r(r,\theta) = +v_0(t)\frac{a^3}{r^3}\cos\theta$$

$$v_\theta(r,\theta) = v_0(t)\frac{1}{2}\frac{a^3}{r^3}\sin\theta$$

$$\vec{v} = \frac{a^3}{2r^3}\left[3\frac{\vec{r}}{r}\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{v_0}(t)\right) - \vec{v_0}(t)\right].$$
(6-15)

$$\varphi = -v_0(t) \frac{1}{2} \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \equiv -\frac{1}{2} \frac{a^3}{r^3} \vec{v_0}(t) \cdot \vec{r}$$
 (6-16)

 \vec{r} é o vetor de posição em relação ao centro da esfera. Portanto o vetor de psição $\vec{r'}$ em relação ao referencial do fluido, parado no infinito, é

$$\vec{r'} = \vec{r} + \int \vec{v_0}(t)dt \tag{6-17}$$

A pressão é determinada usando a equação (6-10) entre um ponto qualquer e um ponto no infinito, onde a pressão é P_0 e a velocidade nula:

$$P = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \rho \frac{v^2}{2} + P_0. \tag{6-18}$$

Para se calcular $\partial \varphi / \partial t$ usamos (6-17).

$$\frac{\partial \vec{r'}}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = -\vec{v_0}(t).$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nabla_{\vec{v_0}} \varphi \cdot \dot{\vec{v_0}} - \vec{v_0} \cdot \nabla_{\vec{r}} \varphi$$

onde $\nabla_{\vec{u}}F \equiv \sum_{i} \partial F/\partial u_{i}\vec{e}_{i}$ e \vec{e}_{i} é o versor na direção do eixo x_{i} . Na <u>superficie</u> da esfera a pressão fica

$$P(a,\theta) = P_0 + \frac{1}{8}\rho v_0^2 (9\cos^2\theta - 5) + \frac{1}{2}\rho a\vec{n} \cdot \dot{v_0}$$

onde \vec{n} é a normal à superficie esférica e θ o ângulo entre \vec{n} e $\vec{v_0}$.

A força de resistêncida do fluido ao movimento seria

$$\vec{F} = \int_0^{\pi} P(a, \theta) \ \vec{n} \ 2\pi \ a^2 \ sen \ \theta \ d\theta.$$

O resultado é nulo quando a esfera não é acelerada, ou seja, um fluido ideal não oferece resistência ao movimento de uma esfera. Devido à natureza da equação de Laplace, devemos esperar um resultado análogo quando houver uma simetria entre a metade anterior e a posterior do corpo.

Êste resultado certamente não corresponde a realidade. É o <u>paradoxo de d'Alembert</u>. Uma solução mais realística é apresentada no último capítulo.

Exemplo 6.5 (Cilindro imerso num fluido ideal) Considere um cilindro de raio a, imerso num fluido que se move com velocidade $\vec{v_0}(t)$. Considerando o movimento do fluido na direção do eixo x e o eixo do cilindro na direção do eixo z o movimento é bi-dimensional, independente da coordenada z. A solução da equação de Laplace em coordenadas polares no plano com origem no eixo do cilindro, que nos interessa, deve ter simetria em relação ao eixo x e portanto da forma

$$\varphi = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-(\ell)} \right) (\cos \ell \theta)$$
 (6-19)

As condições de contorno devem ser $\vec{v}=\vec{v}_0$ no infinito e velocidade radial zero sôbre a esfera e portanto

$$\lim_{r \to \infty} v_r(r, \theta) = -v_0(t) \cos \theta \tag{6-20}$$

$$\lim_{r \to \infty} v_{\theta}(r, \theta) = v_0(t) \sin \theta \tag{6-21}$$

$$e v_r(a, \theta) = 0. (6-22)$$

Com estas condições obtemos

$$\varphi = v_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta. \tag{6-23}$$

As linhas de corrente são determinadas a partir da função de fluxo Ψ tal que $\vec{v} = \nabla \Psi \times \vec{k}$. Para o cilindro obtemos

$$\Psi = v_0 \left(r - \frac{a^2}{r} \right) sen\theta.$$

Problemas

1. O escoamento irrotacional de um fluido ideal em torno de um cilindro parado de raio a pode ser descrito em têrmos do potencial escalar φ ou da função de fluxo Ψ como

$$\vec{v} = \nabla \varphi$$
 ; ou $\vec{v} = \nabla \Psi \times \vec{e_z}$

onde $\vec{e_z}$ é o versor na direção do eixo. O potencial escalar é

$$\varphi \equiv v_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta.$$

 v_0 é uma constante e (r, θ) são as coordenadas polares no plano. A altura do cilindro é grande o suficiente para desprezar a dependência da velocidade com z na região considerada.

- (a) Mostre que o potencial corresponde ao de um fluido incompressível.
- (b) Qual o significado físico de v_0 ?
- (c) Calcule a velocidade na superfície do cilindro.
- (d) Mostre que

$$\Psi(r,\theta) = v_0 \left(r - \frac{a^2}{r}\right) \operatorname{sen}\theta.$$

- (e) Mostre que $\vec{v} \cdot \nabla \Psi = 0$.
- 2. Considere o escoamento irrotacional de um fluido não viscoso, perpendicularmente a um cilindro infinito de raio a. A velocidade é dada como o gradiente do potencial

$$\varphi = -v_0 \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta + \frac{\gamma}{2\pi} \theta; \quad r > a ,$$

em coordenadas cilíndricas.

- (a) Determine a velocidade, em coordenadas cilíndricas.
- (b) Mostre que, no infinito, a velocidade é uniforme. Qual é essa velocidade?
- (c) Mostre que o potencial corresponde ao de um fluido incompressível.
- (d) Mostre que a circulação em torno do cilindro é γ , portanto diferente de zero, apesar de o fluido ser irrotacional.
- (e) Mostre que, se a pressão no infinito é P_{∞} , a pressão num ponto qualquer sobre a superfície cilíndrica pode ser escrita

$$P = P_{\infty} + \frac{\rho v_0^2}{2} - \frac{\rho}{2} \left(2v_0 \sin \theta + \frac{\gamma}{2\pi a} \right)^2.$$

(f) Determine a força que atua, por unidade de comprimento do cilindro. Ela é perpendicular à direção do escoamento. Comente.

Capítulo 7

Esfera movendo num fluido viscoso.

A equação do momento linear (de Navier-Stokes) (3-28, 3-29)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = \overrightarrow{f^V} - \frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v} + \left(\frac{\nu}{3} + \frac{\zeta}{\rho}\right) \nabla (\nabla \cdot \vec{v})$$

é não linear e o seu tratamento matemático é muito difícil. Porém, em algumas circunstâncias, quando o número de Reynolds for pequeno (viscosidade alta), o têrmo não linear se torna muito menor que o têrmo de viscosidade, e se a escala de tempo de variação da velocidade for grande, podemos desprezar os têrmos de inercia

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \equiv \frac{D\vec{v}}{Dt}.$$

Nesses casos, para um fluido incompressível

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \tag{7-1}$$

a equação de Navier-Stokes fica

$$-\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{v} = 0. \tag{7-2}$$

As condições de contorno são

$$\lim_{r\to\infty} \vec{v} = \vec{v_0} \quad ; \quad \vec{v}(r=a) = 0 \quad e \quad P(r\to\infty) = P_\infty. \tag{7-3}$$

Tomando o rotacional de 7-2 obtemos a equação para \vec{v} :

$$\nabla^2(\nabla \times \vec{v}) = 0. \tag{7-4}$$

Como a equação 7-4 é homogênea em \vec{v} e a condição de contôrno é linear e homogênea em $\vec{v_0}$, podemos escrever a velocidade como uma superposição da velocidade no infinito $\vec{v_0}$ e uma perturbação que deve ser linear em $\vec{v_0}$:

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_0} + \nabla \times \vec{A}. \tag{7-5}$$

Vamos usar aqui, as coordenadas polares esféricas r, θ, φ e os versores $\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_{\theta}}, \overrightarrow{e_{\varphi}}$ e o eixo azimutal na direção de v_0 por razões óbvias.

Devido a simetria azimutal do sistema, $\partial v_r/\partial \varphi = \partial v_\theta/\partial \varphi = 0$; consideramos $v_\varphi = 0$, isto é, sem circulação azimutal.

Há uma arbitrariedade na escolha do vetor \vec{A} pois se \vec{A} for solução qualquer $\vec{A'} = \vec{A} + \nabla G$ também é solução pois

$$\nabla \times \nabla G = 0 \rightarrow \vec{v} = \vec{v_0} + \nabla \times \vec{A} = \vec{v_0} + \nabla \times \vec{A}'.$$

Pode- mostrar que qualquer vetor \vec{A}' pode ser escrito $\vec{A}' = \nabla F \times \vec{a} + \nabla G$, onde \vec{a} é um vetor constante qualquer.

Escolhemos ent ao

$$\vec{A} = \nabla F(r, \theta) \times \overrightarrow{v_0} = \nabla \times (F(r, \theta) \overrightarrow{v_0}), \qquad (7-6)$$

sem nehuma perda de generalidade.

Substituindo 7-5 e 7-6 em 7-4 obtemos

$$\nabla^{2}(\nabla \times \vec{v}) = \nabla^{2}\left[\nabla \times \nabla \times (\nabla F \times \overrightarrow{v_{0}})\right] = -\nabla\left[\nabla^{4}F\right] \times \overrightarrow{v_{0}} = 0. \tag{7-7}$$

Seja F' a solução mais geral possível de

$$\nabla^4 F' \equiv \nabla^2 (\nabla^2 F') = 0. \tag{7-8}$$

Defino F tal que $\nabla F = \nabla F' + h\vec{v_0}$ onde h é uma função escalar qualquer.

$$\nabla \left(\nabla^4 F'\right) = \left(\nabla^4 h\right) \vec{v_0}.$$

Como $(\nabla^4 h)$ pode ser qualquer função, F é a solução mais geral possível de 7-7.

Como F e F' dão o mesmo potencial \vec{A} , podemos tomar F' como sendo a solução geral de 7-7, sem nehuma perda de generalidade.

A solução geral da equação 7-8 pode ser secrita em têrmos de polinômios de Legendre¹ mas no caso de esfera imersa no fluido F não deve depender de θ e, portanto deve satisfazer a equação

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left\{r^2\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right)\right]\right\}=0.$$

Integrando obtemos

$$F = C_1 + C_2 r^{-1} + C_3 r^{+2} + C_4 r^{+1}, (7-9)$$

onde C_i são constantes de integração.

O valor de C_1 é irrelevante pois a velocidade só depende de ∇F .

Escrevendo a \vec{v} em coordenadas esféricas e fazendo $\lim_{r\to\infty} \vec{v} = \overrightarrow{v_0}$ obtemos $C_3 = 0$.

Impondo $\vec{v}(r=a) = 0$, determinamos $C_2 = a^3/4$ e $C_4 = 3a/4$.

A solução fica, então

$$F = \sum_{\ell=0}^{\infty} f_{\ell}(r) P_{\ell}(\cos \theta).$$

Escrevendo $f_{\ell}(r)$ como uma série de potências de r obtemos

$$f_{\ell}(r) = C_1^{\ell} r^{\ell} + C_2^{\ell} r^{-\ell-1} + C_3^{\ell} r^{+\ell+2} + C_4^{\ell} r^{-\ell+1}.$$

 $^{^1\}mathrm{Os}$ polinômios de Legendre são auto-funções do operador laplaciano e portanto a solução geral é da forma

$$F = \frac{a^2}{4} \left(\frac{a}{r} + 3 \frac{r}{a} \right); \tag{7-10}$$

$$v_{r} = v_{0} \cos \theta \left(1 - \frac{3}{2} \frac{a}{r} + \frac{1}{2} \frac{a^{3}}{r^{3}} \right);$$

$$v_{\theta} = -v_{0} \sin \theta \left(1 - \frac{3}{4} \frac{a}{r} - \frac{1}{4} \frac{a^{3}}{r^{3}} \right).$$
(7-11)

A pressão é dada por

$$\nabla P/\eta = \nabla^2 \vec{v} = \nabla^2 \nabla \times [\nabla \times (F \overrightarrow{v_0})] = \nabla^2 \nabla \nabla \cdot (F \overrightarrow{v_0}) - \nabla^4 F F \overrightarrow{v_0} = \nabla^2 \nabla \nabla \cdot (F \overrightarrow{v_0}).$$

Portanto,

$$P = P_{\infty} + \eta \nabla^2 \nabla \cdot (F \overrightarrow{v_0}) = P_{\infty} + \eta \overrightarrow{v_0} \cdot \nabla \nabla^2 F = P_{\infty} - \frac{3a}{2} \eta \frac{\overrightarrow{v_0} \cdot \overrightarrow{e_r}}{r^2}. \tag{7-12}$$

A força sôbre a esfera deve ser na direção de $\overrightarrow{v_0}$ (direção \overrightarrow{k}) e pode ser calculada pela fórmula

$$-\int d\vec{S} \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'} \cdot \vec{k} = -\int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{\pi} a^{2} \operatorname{sen} \theta \, d\theta \, \overrightarrow{e_{r}} \cdot \stackrel{\leftrightarrow}{\sigma'} \cdot \vec{k}.$$

O resultado desta integração é conhecido como a **fórmula de Stokes**:

$$Força = 6\pi a \eta v_0. \tag{7-13}$$

É a força com que uma esfera é arrastada pela correnteza.

Apêndice A

Algumas relações vetoriais

A.1 Fórmulas vetoriais

1.
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

2.
$$\nabla \times \nabla \psi = 0$$

3.
$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0$$

4.
$$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}$$

5.
$$\nabla \cdot (\psi \vec{a}) = \vec{a} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \vec{a}$$

6.
$$\nabla \times (\psi \vec{a}) = \nabla \psi \times \vec{a} + \psi \nabla \times \vec{a}$$

7.
$$\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b})$$

8.
$$\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a}(\nabla \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\nabla \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b}$$

9.
$$\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} + (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} + \vec{a}\times(\nabla\times\vec{b}) + \vec{b}\times(\nabla\times\vec{a})$$

A.2 Teoremas do Cálculo Vetorial

Nas fórmulas seguintes V é um volume limitado pelo contorno S; dV e $d\vec{S}$ são elementos de volume e área, respectivamente; o sentido de $d\vec{S}$ é para fora; ϕ , ψ e \vec{A} são funções bem comportadas dentro de V.

1.
$$\int_{V} dV \ \nabla \cdot \vec{A} = \int_{S} d\vec{S} \cdot \vec{A}$$

(Teorema de Gauss, da divergência)

2.
$$\int_{V} dV \nabla \psi = \int_{S} d\vec{S} \psi$$

3.
$$\int_{V} dV \ \nabla \times \vec{A} = \int_{S} d\vec{S} \times \vec{A}$$

4.
$$\int_V dV \ (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) = \int_S d\vec{S} \cdot (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi)$$
 (Teorema de Green)

Nas fórmulas seguintes S é uma superficie aberta limitada pelo contorno C; dS e $d\vec{\ell}$ são elementos de área e linha, respectivamente; o sentido de $d\vec{S}$ é definido pela regra da mão direita em relação ao sentido da integral de linha ao longo de C; ϕ e \vec{A} são funções bem comportadas sôbre S.

5.
$$\int_{S} d\vec{S} \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \oint_{C} d\vec{\ell} \cdot \vec{A}$$

(Teorema de Stokes)

6.
$$\int_{S} d\vec{S} \times \nabla \psi = \oint_{C} d\vec{\ell} \ \psi$$

A.3 Formas explícitas das operações vetoriais

Coordenadas cilíndricas (r, φ, z)

1.
$$\nabla \psi = \vec{e_r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \vec{e_\varphi} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \vec{e_z} \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

2.
$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

3.
$$\nabla \times \vec{A} = \vec{e_r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial z} \right) + \vec{e_{\varphi}} \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \vec{e_z} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rA_{\varphi})}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right)$$

4.
$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

5.
$$(\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} = \vec{e_r} \left(\vec{A} \cdot \nabla B_r - \frac{A_{\varphi}B_{\varphi}}{r} \right) + \vec{e_{\varphi}} (\vec{A} \cdot \nabla B_{\varphi} + \frac{1}{r} A_{\varphi} B_r) + \vec{e_z} (\vec{A} \cdot \nabla B_z)$$

$$\begin{aligned} 6. & \nabla^2 \vec{A} \equiv (\nabla \cdot \nabla) \vec{A} \\ & = \vec{e_r} \left[\nabla^2 A_r - \frac{1}{r^2} \left(A_r + 2 \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial \varphi} \right) \right] + \vec{e_{\varphi}} \left[\nabla^2 A_{\varphi} - \frac{1}{r^2} \left(A_{\varphi} - 2 \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \right] + \vec{e_z} \nabla^2 A_z \end{aligned}$$

Coordenadas esféricas (r, θ, φ)

1.
$$\nabla \psi = \vec{e_r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \vec{e_\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \vec{e_\varphi} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$$

2.
$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

3.
$$\nabla \times \vec{A} = \vec{e_r} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_{\varphi}) - \frac{\partial A_{\theta}}{\partial \varphi} \right]$$

 $+ \vec{e_{\theta}} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\varphi}) \right] + \vec{e_{\varphi}} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r A_{\theta}) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right]$

4.
$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}$$

$$\left[\text{ Observação: } \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \psi) \right]$$

Apêndice B

Relações da termodinâmica

$$\kappa_m = -\frac{1}{\mathcal{V}} \left(\frac{\delta \mathcal{V}}{\delta P}\right)_m = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\delta \rho}{\delta P}\right)_m \text{ compressibilidade a } m \text{ constante}$$

$$\alpha = \frac{1}{\mathcal{V}} \left(\frac{\delta \mathcal{V}}{\delta T}\right)_P = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\delta \rho}{\delta T}\right)_P \text{ coeficiente de expansão térmica a pressão constante}$$

$$c_{\mathcal{V}} = T \left(\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta T}\right)_{\mathcal{V}} \text{ calor especifico a volume constante}$$

$$c_P = T \left(\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta T}\right)_P \text{ calor especifico a pressão constante}$$

Potenciais termodinâmicos			Relações de Maxwell
Energia interna	$\mathcal{U}(\mathcal{S},\mathcal{V})$	$\delta \mathcal{U} = T \delta \mathcal{S} - P \delta \mathcal{V}$	$\left(\frac{\partial T}{\partial \mathcal{V}}\right)_{\mathcal{S}} = -\left(\frac{\partial P}{\partial \mathcal{S}}\right)_{\mathcal{V}}$
Energia livre (potencial de Helmoltz)	$\mathcal{F}(T,\mathcal{V}) = \mathcal{U} - T\mathcal{S}$	$\delta \mathcal{F} = -\mathcal{S}\delta T - P\delta \mathcal{V}$	$\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathcal{V}}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{\mathcal{V}}$
Entalpia	$\mathcal{H}(\mathcal{S}, P) = \mathcal{U} + P\mathcal{V}$	$\delta \mathcal{H} = T \delta \mathcal{S} + \mathcal{V} \delta P$	$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{\mathcal{S}} = \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathcal{S}}\right)_{P}$
Potencial de Gibbs	$\mathcal{G}(T,P)=\mathcal{H}-T\mathcal{S}$	$\delta \mathcal{G} = -\mathcal{S}\delta T + \mathcal{V}\delta P$	$-\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial P}\right)_T = \left(\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial T}\right)_P$

Duas relações podem ser deduzidas para a entropia, chamadas, relações T δS :

1a. equação $T\delta S$	$T\delta \mathcal{S} = c_{\mathcal{V}}\delta T + T\frac{\alpha}{\kappa_T}\delta \mathcal{V}$
$oxed{2a.}$ equação $T\delta\mathcal{S}$	$T\delta S = c_P \delta T - T\alpha \mathcal{V} \delta P$

No estudo de fluidos é conveniente usar, ao invés das grandezas extensivas \mathcal{V} , \mathcal{S} , \mathcal{U} , \mathcal{F} , \mathcal{H} e \mathcal{G} , as grandezas por unidade de massa. O volume por unidade de massa é o inverso da densidade de massa. Substituindo \mathcal{V} por $1/\rho$ nas relações acima temos as relações para as novas grandezas.

Índice Remissivo

Arquimedes, princípio de, 49 atmosfera, 39, 59 auto-similar, 42

Bernouilli, equação de, 55, 57, 63 Bernouilli, teorema de , 79

compressão, 27 compressibilidade, 16, 44, 57 continuidade, equação de, 14 controle, volume de, 14 Coriolis, força de, 10 Coriolis, parâmetro de, 39

d'Alembert, paradoxo de, 76, 83 distorção, 27

entropia, 52 estagnação, ponto de, 57 Euler, equação de, 19, 30, 32, 45 Euler, fluido de, 32 Euleriana, descrição, 1

fluxo, 4, 6

Gauss, teorema de, 6

Helmoltz, teorema de, 71

ideal, fluido, 54–57, 75, 78 isentrópico, 63 Bernouilli, equação, 57

Leibnitz, teorema de, 20

Mach, número de, 44, 58

Navier-Stokes, equação de, 19 Newtoniano, fluido, 24

Pascal, teorema de, 27 Pitot, 58 Poiseuille, fórmula de, 36 potencial termodinâmico, 52 Prandtl, Pitot-, 58 Reynolds, número de, 40, 44, 45 Rossby, número de, 47

similaridade, 42 solenoidal, 6 Stokes, lei de, 29 Stokes, teorema de, 7

tensão, tensor de, 25 tensor, fluxo de momento linear, 30 Thomson, teorema de, 69

Venturi, tubo de, 56 viscosidade, 31, 45 vorticidade, 7, 66

Bibliografia

- [1] R. A. Brown Fluid Mechanics of the Atmosphere Academic Press, Inc.,1991.
- [2] G. K. Batchelor An Introduction to Fluid Dynamics Cambridge University Press, 1967.
- [3] Mauro S. D. Cattani Elementos de Mecânica dos Fluidos, Edgar Blücher Ltda., 1990.
- [4] N. Curle & H. J. Davies Modern Fluid Dynamics, D. Van Nostrand Co.
- [5] T. E. Faber Fluid Dynamics for Physicists Cambridge University Press, 1995.
- [6] Feynman R. P., Leighton R. B. & Sands M The Feynman Lectures on Physics, vol. II. Addison-Wesley publishing Inc. 1965.
- [7] L. Prandtl & O. G. Tietjens Fundamentals of Hydro- and Aeromechanics, Dover Publications, Inc., New York, 1934.
- [8] I. Shames Mechanics of Fluids, McGraw-Hill.
- [9] W. M. Swanson Fluid Mechanics, Holt, Rinehart & Winston Inc. 1970.
- [10] Y. Hama *Mecânica dos Fluidos*, apostila para o curso de Mecânica dos Fluidos (FMA 324) no IFUSP, 10. semestre de 1994.
- [11] H. B. Callen Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics, John Wiley & Sons