

Capítulo 2

Equação de Advecção em Diferenças Finitas

Nesse capítulo serão consideradas equações diferenciais com uma variável dependente e duas ou três variáveis independentes, isto é, equações diferenciais parciais (EDP). Mais especificamente, serão consideradas várias formas simplificadas da equação da advecção, que descrevem a advecção de uma variável dependente. Essa equação é considerada, na prática, a parte mais importante das equações que governam a atmosfera.

A análise considerará primeiro, problemas associados com uma forma linear unidimensional da equação da advecção, e a seguir serão analisados problemas com formas mais complexas da equação da advecção.

1. Esquemas com diferenciação espacial centrada de 2ª ordem

Primeiro será considerada a equação:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

Aqui $u = u(x,t)$ é uma função de duas variáveis independentes: a variável independente x representa uma variável de espaço e, deste modo (1.1) pode ser chamada de equação da advecção linear unidimensional, que tem a seguinte solução:

$$u = f(x-ct), \quad (1.2)$$

onde f é uma função arbitrária. O nome da “equação da advecção” foi sugerida por Phillips (1960).

Se a derivada espacial em (1.1) é aproximada por um quociente de diferenças finitas centralizado, usando valores dos dois pontos mais próximo, obtêm-se a derivada temporal:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} = -c \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x}, \quad (1.3)$$

o subscrito aqui, como antes, denota a distância da origem em incrementos de espaço; isto é, $x = j \Delta x$. Um número de esquemas para encontrar a solução numérica de (1.1) pode ser construído utilizando a derivada temporal em (1.3) por um dos métodos estudados no capítulo precedente.

1.1 Esquema de *Leapfrog*

Por exemplo, quando a derivada temporal é aproximada usando o esquema do *leapfrog*, obtêm-se:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = -c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}, \quad (1.4)$$

como um dos muitos esquemas possíveis para a solução numérica de (1.1).

As propriedades de esquemas construídos deste modo podem ser inferidas para estudar as propriedades de esquemas de diferenciação temporal aplicados à equação de oscilação. Para ver isto, pode-se substituir dentro de (1.3) uma solução tentativa em forma de componente harmônica simples:

$$u_j = \text{Re} [U(t) e^{ikj\Delta x}], \quad (1.5)$$

que após um rearranjo resulta em:

$$\frac{dU}{dt} = i \left(\frac{c}{\Delta x} \text{sen}(k\Delta x) \right) U. \quad (1.6)$$

Denotando:

$$\varpi = -\frac{c}{\Delta x} \text{sen}(k\Delta x), \quad (1.7)$$

que é equivalente a equação de oscilação do capítulo anterior. Agora, se (1.6) for aproximada usando um dos esquemas de diferenciação no tempo, a mesma equação de diferenças finitas é obtida ao se aplicar o esquema para (1.3) e substituindo a solução de onda (1.5). Deste modo, propriedades de esquemas de diferença finitos derivados de (1.3) podem ser inferidas nos resultados da seção 2 do capítulo anterior, onde a frequência ω é dada por (1.7).

Como um exemplo, se (1.6) é aproximada usando o esquema de *leapfrog*, obtêm-se:

$$U^{(n+1)} = U^{(n-1)} + 2i \left(-c \frac{\Delta t}{\Delta x} \text{sen}(k\Delta x) \right) U^{(n)}. \quad (1.8)$$

Usando a notação do capítulo anterior, têm-se:

$$p \equiv -\frac{c}{\Delta x} \text{sen}(k\Delta x). \quad (1.9)$$

Obtêm-se a mesma equação de diferenças finitas (1.8) aplicando o esquema de *leapfrog* para (1.3) dando (1.4) e então o substituindo (1.5) em (1.4). Deste modo, as propriedades de (1.4) podem ser inferidas de (1.7) para conhecer as propriedades do esquema de *leapfrog* aplicado à equação de oscilação.

Por exemplo, para o caso da estabilidade do esquema *leapfrog*, é requerido que a condição $|p| \leq 1$ seja satisfeita para todos valores de ω . Portanto,

$$\left| c \frac{\Delta t}{\Delta x} \text{sen}(k\Delta x) \right| \leq 1$$

para qualquer k admissível. Esse critério, obtido no capítulo anterior, mostra que a estabilidade não é obtida simplesmente reduzindo os incrementos no espaço e no tempo. Todavia, é necessário a redução da razão desses incrementos $\Delta t/\Delta x$ para obter a estabilidade.

Desde que $|\text{sen } k\Delta x|$ não alcance o máximo valor da unidade no domínio admissível de k obtêm-se a condição de igualdade:

$$\left| c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1. \quad (1.10)$$

A condição (1.10) foi primeiro encontrado por Courant, Friedrichs e Lewy (1928) e, portanto, é usualmente referida como Courant-Friedrichs-Lewy, ou CFL, critério de estabilidade.

1.2 Modos físico e computacional

Pode-se também usar outros resultados da análise prévia. São dadas duas soluções para $U(n)$, o modo físico e o modo do computacional:

$$U_1^{(n)} = \lambda_1^n U_1^{(0)}, U_2^{(n)} = \lambda_2^n U_2^{(0)} \quad (1.11)$$

onde λ_1 e λ_2 são dadas no capítulo anterior. No caso estável, têm-se que $p \neq 0$,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= e^{i\theta}, \\ \theta &= \arctan\left(\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\right), \\ \lambda_2 &= e^{i(\pm\pi-\theta)} = -e^{-i\theta}.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Usando (1.5), vê-se que a aproximação u_j^n também têm um modo físico e um modo computacional. Para o modo físico:

$$u_j^n = \text{Re}\left[U_1^{(0)} e^{ik\left(j\Delta x + \frac{\theta}{k\Delta t}n\Delta t\right)}\right].\tag{1.13}$$

Para o modo computacional, por outro lado, obtêm-se

$$u_j^n = \text{Re}\left[(-1)^n U_2^{(0)} e^{ik\left(j\Delta x - \frac{\theta}{k\Delta t}n\Delta t\right)}\right].\tag{1.14}$$

Essas expressões podem ser comparadas com a solução verdadeira de (1.1) na forma de um componente harmônico simples, como dado no capítulo anterior,

$$U(x,t) = \text{Re}[U(0) e^{ik(x-ct)}]\tag{1.15}$$

onde encontra-se que a velocidade de fase do modo físico, c_1 , é igual a $-\theta/k\Delta t$, e a velocidade de fase do modo do computacional, c_2 , $\theta/k\Delta t$. A eq. (1.12) mostra que se $\Delta t \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow p$, e (1.9) mostra que se $\Delta x \rightarrow 0$, $p \rightarrow ck\Delta t$. Deste modo, então, Δx , $\Delta t \rightarrow 0$ e $c_1 \rightarrow c$, isto é, a velocidade de fase modo físico aproxima-se da velocidade de fase da solução verdadeira, no mesmo tempo em que $c_2 \rightarrow -c$. Em adição, o modo computacional, muda de sinal em todos os pontos da grade a cada passo de tempo, por causa do fator $(-1)^n$ em (1.14).

1.3 Esquema de Matsuno

Agora será utilizado o esquema de Matsuno apresentado no capítulo anterior para aproximar o derivada temporal em (1.3). Em primeiro lugar, os valores aproximados de $u_j^{(n+1)*}$, serão calculados usando o esquema adiantado, que é

$$\frac{u_j^{(n+1)*} - u_j^n}{\Delta t} = -c \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right). \quad (1.16)$$

Então, esses valores aproximados são utilizados num esquema atrasado, que é

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -c \left(\frac{u_{j+1}^{(n+1)*} - u_{j-1}^{(n+1)*}}{2\Delta x} \right). \quad (1.17)$$

É instrutivo eliminar valores aproximados de $u^{(n+1)*}$ desta equação, substituindo valores dados por (1.16), com o subscrito j substituído por $j+1$, e então por $j-1$. Desta forma obtêm-se

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -c \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) + c^2 \Delta t \left(\frac{u_{j+2}^n - 2u_j^n + u_{j-2}^n}{(2\Delta x)^2} \right) \quad (1.18)$$

Sem o último termo, a equação acima representa a equação de diferenças finitas obtida quando o esquema adiantado no tempo e centrado no espaço é utilizado para derivar (1.3). O terceiro termo aproxima-se de zero quando $\Delta t \rightarrow 0$, e (1.18) é, deste modo, um esquema consistente para a equação da advecção. Por outro lado, para um Δt fixo este termo se aproxima de $c^2 \Delta t (\partial^2 u / \partial x^2)$ quando $\Delta x \rightarrow 0$. Isto é, portanto, da mesma forma que a aproximação de diferenças finitas para o termo de difusão de Fick, e ele tem um efeito do amortecimento. Deste modo, o esquema do Matsuno não parece conveniente para resolver a equação da advecção, pois impõe um amortecimento na solução numérica, que não é observada na solução analítica.

1.4 Estabilidade

É conveniente incluir aqui, mais um exemplo do uso do método de energia para testar estabilidade. Sendo aplicável também para equações do tipo não-linear, pode ser utilizado para estudar o efeito de condições de limite em estabilidade.

Uma vasta classe de esquemas para resolver (1.3) podem ser escritos como:

$$u_j^{n+1} - u_j^n = -\frac{1}{2} \mu (u_{j+1}^* - u_{j-1}^*), \quad (1.19)$$

onde

$$\mu \equiv c\Delta t / \Delta x \quad (1.20)$$

e u_j^* é uma função linear de um número de valores u_j^n . Por exemplo, para obter um esquema de dois níveis não iterativo, escreve-se:

$$u_j^* = \alpha u_j^n + \beta u_j^{n+1}. \quad (1.21)$$

Para o esquema iterativo de dois níveis:

$$u_j^* = u_j^n - \frac{\beta}{2} \mu (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (1.22)$$

Finalmente, para o esquema de Adams Bashforth

$$u_j^* = \frac{3}{2} u_j^n - \frac{1}{2} u_j^{n-1}. \quad (1.23)$$

Para analisar a estabilidade do esquema não-iterativo de dois níveis é conveniente primeiro multiplicar (1.19) por u_j^* e somar para todos j , obtendo:

$$\sum_j u_j^* (u_j^{n+1} - u_j^n) = -\frac{1}{2} \sum_j u_j^* (u_{j+1}^* - u_{j-1}^*).$$

O lado direito desaparece se condições de limite cíclicas forem consideradas, logo:

$$\sum_j u_j^* (u_j^{n+1} - u_j^n) = 0.$$

Adicionando a relação:

$$\sum_j \frac{1}{2} [(u_j^{n+1})^2 - (u_j^n)^2] = \sum_j \frac{1}{2} (u_j^{n+1} + u_j^n) (u_j^{n+1} - u_j^n).$$

Substituindo (1.21), e eliminando β usando $\beta = 1 - \alpha$, obtêm-se, depois algum rearranjo:

$$\sum_j \frac{1}{2} [(u_j^{n+1})^2 - (u_j^n)^2] = \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) \sum_j (u_j^{n+1} - u_j^n)^2. \quad (1.24)$$

Deste modo, se $\alpha > 1/2$ tem-se um esquema do instável; se $\alpha = 1/2$ um esquema neutro e estável, e se $\alpha < 1/2$ um esquema estável e com amortecimento, que faz com que a “energia total” $\sum_j \frac{1}{2} (u_j^n)^2$ decresça monotonicamente com o tempo.

1.4 Esquema de Lax-Wendroff:

Para finalizar esta seção, será analisado o esquema que foi proposto por Lax e Wendroff (1960) que é denominado Lax-Wendroff, ou, mais especificamente, o esquema de dois-passos de Lax-Wendroff. Em contraste com os esquemas discutidos até aqui, o esquema Lax-Wendroff não pode ser construído por uma escolha independente de aproximações de diferença finitas no espaço e derivada temporais da equação da advecção. Para descrever o procedimento, foi usado a matriz mostrada na figura 1.

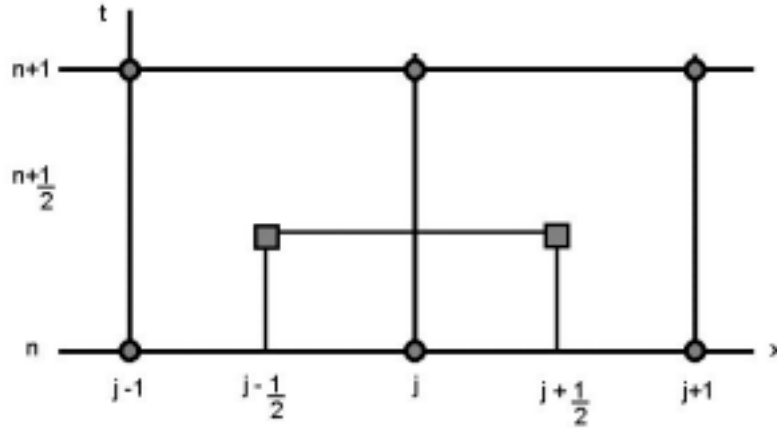


Figura 1 Matriz espaço - tempo usada para construção do esquema Lax - Wendroff

Primeiro, valores provisórios são calculados nos centros da matriz retangular, para pontos denotados por sinais quadrados (■). Isto é feito usando diferenças adiantadas no espaço e no tempo, tomando médias aritméticas de $u_{j+1/2}^n$ e $u_{j-1/2}^n$; nos dois pontos de grade mais próximos de u_j^n . Portanto:

$$\frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n)}{\frac{1}{2}\Delta t} = -c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}.$$

$$\frac{u_{j-1/2}^{n+1/2} - \frac{1}{2}(u_j^n - u_{j-1}^n)}{\frac{1}{2}\Delta t} = -c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}.$$
(1.25)

Usando esses valores provisórios, o próximo passo é feito, centralizando no espaço e tempo simultaneamente; deste modo:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - u_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x}.$$
(1.26)

Substituindo os valores provisórios de (1.25) dentro desta equação, vem que:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2} c^2 \Delta t \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (1.27)$$

É interessante notar que esta equação de diferenças finitas é muito parecida com (1.18), que é obtida usando um esquema simples de Matsuno centralizado com diferenças espaciais e temporais. A única diferença está no último termo. Este, novamente, se aproxima de zero quando $\Delta t \rightarrow 0$. Entretanto, se $\Delta x \rightarrow 0$ com o Δt fixo, ele se aproxima para $\frac{1}{2} c^2 \Delta t (d^2u/d^2x)$. Deste modo, vê-se que isto é equivalente a uma aproximação em forma de diferenças finitas do termo de difusão de Fick, mas com um coeficiente de metade do tamanho do dado por (1.18). Além disso, este termo é agora calculado sobre um intervalo $2\Delta x$, e seu amortecimento pode ser máximo. Esta espécie de dependência em comprimento de onda é freqüentemente considerada desejável para o amortecimento em um esquema de diferenças finitas. Isto é porque, como será visto mais tarde, há problemas sérios com cálculos de diferenças finitas para pequenos comprimentos de onda, especialmente $2\Delta x$. Isto freqüentemente pode ser aliviado usando um esquema dissipativo.

2. Dispersão computacional

Como foi visto, a equação da advecção linear:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c = \text{constante} \quad (2.1)$$

tem uma solução na forma de uma componente harmônica simples

$$u(x,t) = \text{Re}[U(t) e^{ikx}] \quad (2.2)$$

fornecida por:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = ikcU \quad (2.3)$$

Nesta equação do oscilador kc é igual a freqüência ν , e $c^* = \nu/k$ é a velocidade de fase das ondas. É visto que ondas de todos os comprimentos de onda são propagadas com a mesma velocidade de fase, e são advectadas sem nenhuma mudança na forma e com velocidade constante c^* ao longo o eixo do x . Deste modo, não há dispersão.

Agora será considerada a equação:

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + c \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = 0 \quad (2.4)$$

que é obtida ao aproximar a derivada espacial em (2.1) por uma diferença centrada. Uma equação deste tipo pode ser chamado “diferencial - diferença” (EDD), ou equação semi-discreta. Equações deste tipo são utilizadas para estudar o efeito de aproximações de diferenças espaciais particulares nas propriedades da solução numérica.

Lembrando que (2.4) tem uma solução na forma de componente harmônico simples

$$u_j(t) = \text{Re}[U(t) e^{ikj\Delta x}], \quad (2.5)$$

fornecido por:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + ik \left(c \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \right) U = 0, \quad (2.6)$$

que comparado com (2.3) dá a seguinte velocidade de fase:

$$c^* = c \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}. \quad (2.7)$$

Esta velocidade de fase é uma função do número de onda k . Deste modo, a diferencial espacial finita causa uma dispersão das ondas, chamada efeito de dispersão computacional. Quando $k\Delta x$ aumenta, a velocidade de fase c^* decresce monotonicamente para c , e torna-se zero para o mais curto comprimento de onda resolvível ($2\Delta x$), quando $k\Delta x = \pi$, como mostrado a seguir:

$$k = \frac{2\pi}{L} = \frac{2\pi}{N\Delta x},$$

mas para a onda $2\Delta x \rightarrow N=2$, logo:

$$k = \frac{2\pi}{2\Delta x} \Rightarrow k\Delta x = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow k\Delta x = \pi$$

Deste modo, todas as ondas propagam-se em uma velocidade que é menor que a velocidade de fase verdadeira c , com este efeito de desaceleração aumentando para valores menores do que o comprimento de onda. A onda chamada “onda com comprimento $2\Delta x$ ”, (ODG) é estacionária. A razão por que a ODG é estacionária é óbvia quando se observa a fig.2. Para

essa onda $u_{j+1} = u_{j-1}$ em todos os pontos de grade, e (2.4) tende a um valor de zero para $\frac{\partial u_j}{\partial t}$.

Dois efeitos são vistos aqui: primeiro, a velocidade de advecção é menor que a velocidade de advecção verdadeira. A consequência deste erro é um retardo geral do processo de advecção. Segundo, a advecção muda com o número de onda, e esta falsa dispersão é particularmente séria para as ondas mais curtas.

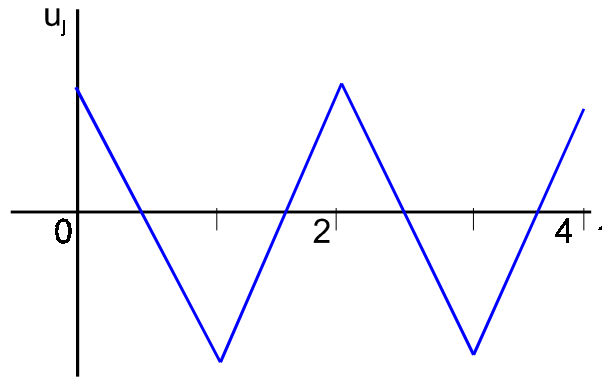


Figura 2 Gráfico da onda ODG , com comprimento de onda $2 \Delta x$.

Se o padrão que está sendo advectado representa uma superposição de mais que uma onda, esta falsa dispersão resultará em uma deformação do padrão inicial. Isto acontece especialmente, com padrões de pequena escala na atmosfera, ex. frentes, linhas, etc... que representa um superposição de muitas ondas, incluindo uma proporção significativa de ondas mais curtas.

No caso da equação linear (2.1) foi obtida a velocidade de grupo c_g :

$$c_g = \frac{\partial(kc)}{\partial k} = c. \quad (2.8)$$

Deste modo, a velocidade de grupo é constante e igual a velocidade de fase C . Com a EDD (2.4), entretanto, (2.7) resulta em uma velocidade de grupo C_g^* :

$$c_g^* = \frac{d(kc^*)}{dk} = c_g \cos k\Delta x \quad (2.9)$$

Deste modo, com $k\Delta x$ aumentando, a velocidade de grupo C_g^* decresce monotonicamente para C_g e torna-se igual a $-C_g$, para as menores ondas resolvidas ($2\Delta x$). Esses resultados são resumidos na fig.2.2

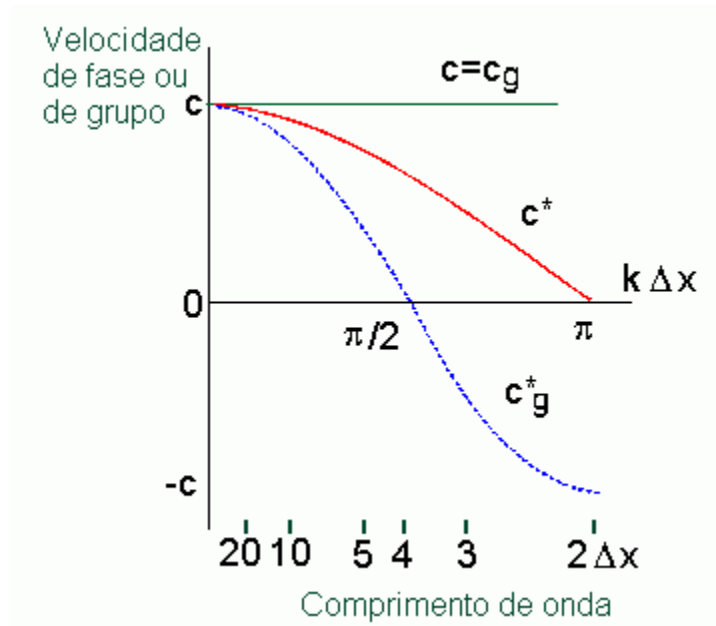


Figura 2.2 Velocidade de fase e de grupo, no caso da equação de advecção linear, C e Cg, e no caso da EDD, C* e Cg*.

3. Esquemas com diferenciação espacial não centrada

A derivada espacial em (2.1) pode também ser aproximada usando uma diferencial “não centrada”. Isto pode ser feito usando valores em dois pontos para esta aproximação, este método é atrativo por razões físicas, tendo um destes pontos como o ponto central e o segundo localizado no lado de que o fluido está sendo adveccionado, na direção do escoamento. Portanto, aproximando (2.1) por

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + c \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} = 0, \quad \text{para } c > 0 \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + c \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} = 0. \quad \text{para } c < 0 \quad (3.1b)$$

Essas equações são, outra vez, EDDs. A equação (3.1a) emprega o esquema atrasado e a equação (3.1b) o esquema adiantado para aproximar a derivada espacial. Entretanto, em ambos casos as diferenças são calculadas no lado em que a velocidade de advecção escoou, logo, essas diferenças são chamadas diferenças corrente acima (up). Calculado no lado contrário as diferenças podem ser chamadas diferenças corrente abaixo (down).

As equações (3.1) podem ser utilizadas para construir esquemas para a equação de advecção, se aproximar a derivada temporal por um dos muitos métodos possíveis. O resultado dos esquemas, no entanto, são unicamente, de uma ordem de precisão. Entretanto, eles têm uma vantagem particular, sobre esquemas centralizados no espaço, quando aplicados a advecção de um distúrbio parecido ao um considerado na seção precedente. Isto é, com diferenças corrente acima, o distúrbio não propaga na direção contrária a advecção física.

Se, especificamente, uma diferença adiantada é utilizada para a derivada temporal em (3.1), obtêm-se, para $c > 0$:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (3.2a)$$

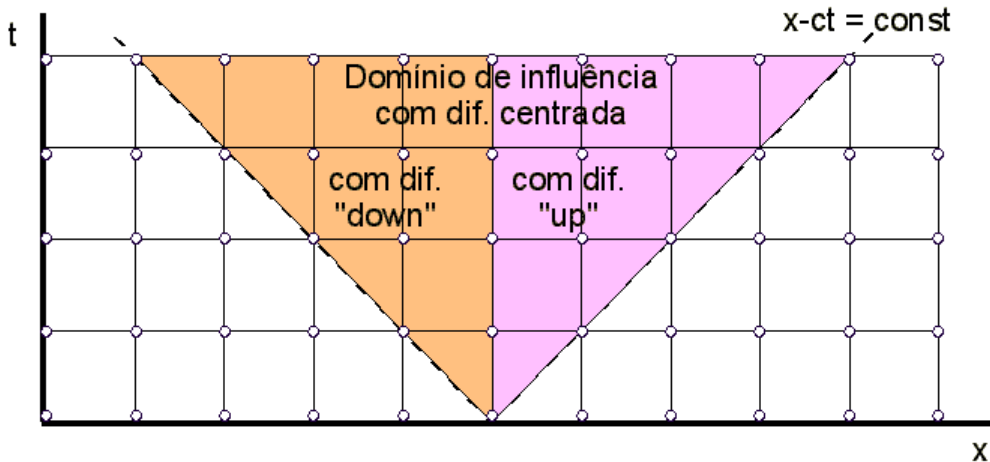


Figura 3.1 Domínio de influência em pontos de grade, para o esquema (3.2a) com diferenciação corrente acima (up), corrente abaixo (down) e centrada, e para a solução verdadeira.

A vantagem que é alcançada, ao menos em princípio, quando se usa uma diferencial corrente acima comparada com uma diferença centrada ou uma diferencial corrente abaixo, pode ser ilustrada considerando o “domínio de influência” de um ponto de grade em diferentes esquemas.

Pode se considerar o caso de $c > 0$. No caso da solução verdadeira, o valor no ponto de grade propaga a característica $x - ct = a$, (a é uma constante qualquer) por uma linha. A fig. 3.1 mostra um ponto de grade marcado por um círculo com a linha característica associada passando através dele. Com a diferencial corrente acima em (3. 2a), o valor naquele ponto de grade pode influenciar os valores em pontos dentro do domínio (marcado por linhas

verticais). A figura também mostra os “domínios de influência” com aproximações centradas e corrente abaixo. Dos três domínios de influência, o dado pela diferenciação corrente acima é, claramente, a melhor aproximação para a linha de característica que representa o domínio de influência da solução verdadeira.

Esta discussão sugere construir um esquema para (2.1) traçando as características através do ponto $(j\Delta x, (n+1)\Delta t)$ para intersectar o prévio nível de tempo $t = n\Delta t$ e calcular o valor de u^* no ponto de intersecção por interpolação, colocando então, $u_j^{n+1} = u^*$. Escolhendo um procedimento de interpolação linear, que empregado em dois pontos vizinhos no tempo $n\Delta t$, obtêm-se:

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} (\Delta x - c\Delta t). \quad (3.2)$$

Para analisar as propriedades de esquemas que podem ser obtidos de (3.1a) será considerada a solução do analítica desta EDD. Para pequenos valores de Δt pode se aproximar da solução obtida de diferentes esquemas. Introduzindo o tempo não-dimensional τ como: $\tau = ct/\Delta x$ A equação (3.1a) pode então ser escrita como

$$\frac{du_j(\tau)}{d\tau} + u_j(\tau) - u_{j-1}(\tau) = 0. \quad (3.3)$$

A solução desta equação é a função freqüência de Poisson:

$$u_j(\tau) = \begin{cases} \frac{e^{-\tau} \tau^{j-p}}{(j-p)!}, & j \geq 0 \\ 0, & j < 0 \end{cases} \quad (3.4a)$$

$$u_j(\tau) = \begin{cases} 0, & j < 0 \end{cases} \quad (3.4b)$$

e pode ser verificada por substituição. Aqui p é, outra vez, um inteiro arbitrário, isto é, já considerando o fato, que a localização do ponto $j = 0$ é arbitrário.

Formando uma solução mais general que (3.4), como uma combinação linear de todas as soluções possíveis, que é:

$$u_j(\tau) = \sum_{p=-\infty}^j \alpha_p \frac{e^{-\tau} \tau^{j-p}}{(j-p)!}, \quad (3.5)$$

onde α_p são constantes arbitrárias. Substituindo $\tau = 0$ dentro de (3.5) obtêm-se:

$$u_j(0) = \alpha_j \quad (3.6)$$

Deste modo, as constantes αp podem, novamente, serem escolhidas a fim de que satisfaçam as condições iniciais $u_j = u_j(0)$, e (3.5) represente a solução geral de (3.3), ou (3.1a). Considerando o aspecto da solução simples (3.4), e os limites da somatória em (3.5), vê-se que em geral, o valor $u_j(\tau)$ no ponto j pode ser considerado como um resultado da superposição do efeito dos valores iniciais no ponto e dos valores iniciais em todos os pontos localizados acima dele.

4. Esquemas com diferenciação espacial centrada de 4ª ordem

A maior parte das dificuldades que foram discutidas nesse capítulo, em particular, o erro na velocidade de fase e a dispersão computacional, são devido as aproximações usando diferenciação espacial. Uma possibilidade é aplicar aproximações de ordem de precisão mais alta. Inicialmente será construída uma aproximação de ordem 4. Quando o valor aproximado de u_j , é expandido em uma série de Taylor em torno do ponto central, e substituído dentro de um quociente de diferenças finitas, é obtido:

$$\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4]. \quad (4.1)$$

Deste modo, este quociente é de segunda ordem de precisão. Ele é formado tomando as diferenças de valores de u , em pontos a uma grade de distância do ponto central. Similarmente, o quociente pode ser formado tomando diferenças de valores de dois pontos de grade, substituindo Δx em (4.1) por $2\Delta x$,

$$\frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{4}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta x)^2 + O[(\Delta x)^4]. \quad (4.2)$$

Este quociente é considerado de segunda ordem de precisão, mas com coeficientes maiores. Outras aproximações consistentes para $\partial u/\partial x$ pode ser formado como combinação linear dos quocientes (4.1) e (4.2). A combinação para os termos de segunda ordem no truncamento de erros de (4.1) e (4.2) é particularmente importante. Isto é:

$$\frac{4}{3} \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + O[(\Delta x)^4], \quad (4.3)$$

e representam uma aproximação de quarta ordem de precisão para a aproximação de $\partial u/\partial x$.

Analisando o efeito da velocidade de fase usando a aproximação (4.3) para a derivada espacial da equação de advecção. Substituindo a derivada espacial em (2.1) por (4.3) obtêm-se a EDD

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + c \left(\frac{4}{3} \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{u_{j+2} - u_{j-2}}{4\Delta x} \right) = 0 \quad (4.4)$$

Como na seção 2, foi investigado o aspecto de uma solução experimental na forma de um componente harmônico simples

$$u_j(t) = \text{Re} [U(t) e^{ikj\Delta t}] \quad (4.41)$$

com diferenciação espacial de segunda ordem, é obtida a velocidade de fase

$$c^* = c \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \quad (4.42)$$

Agora, do mesmo modo, com uma diferenciação de quarta ordem encontra-se a velocidade de fase

$$c^{**} = c \left(\frac{4}{3} \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{\sin 2k\Delta x}{2k\Delta x} \right). \quad (4.5)$$

Comparando esses dois resultados vê-se que para a diferencial de segunda ordem, obtêm-se por expansão de séries, para pequenos valores de k:

$$c^* = c \left(1 - \frac{1}{3!} (k\Delta x)^2 + \dots \right). \quad (4.5.1)$$

E por outro lado, para esquema de quarta ordem:

$$c^{**} = c \left(1 - \frac{4}{5!} (k\Delta x)^4 + \dots \right). \quad (4.5.2)$$

Deste modo, ainda que o efeito desacelerado esteja presente, o erro da velocidade de fase é muito reduzido para pequenos valores de k. Essas velocidades de fase são mostradas na fig. 4.1 como função de $k\Delta x$, para todos valores admissíveis de k. A figura ilustra o aumento significativo na precisão da velocidade de fase para ondas de grande e média escala. Entretanto, quando a onda se aproxima de $2\Delta x$, o aumento em velocidade de fase obtido pelo método de quarta ordem diminui, até, finalmente tornar-se estacionário.

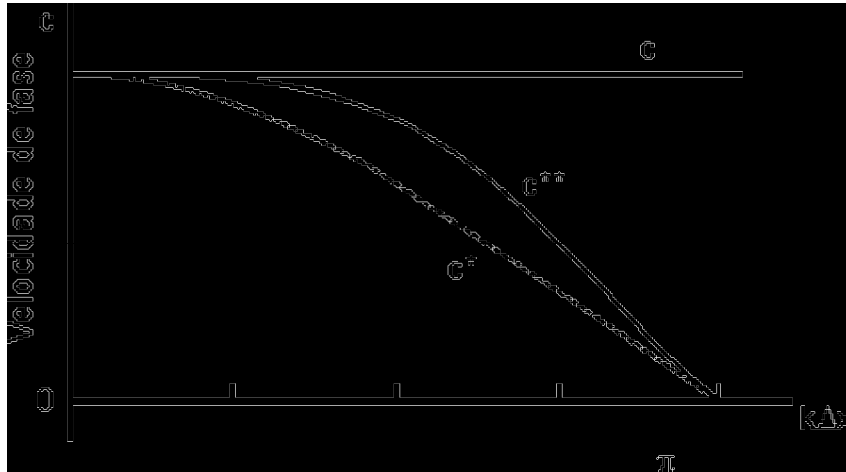


Figura 4.1 Velocidade de fase da equação da advecção linear, c , e EDD de segunda ordem (c^*) e quarta ordem (c^{**}).

para

5. Equação de advecção em duas dimensões

Será considerado agora, a equação de advecção linear em duas dimensões:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C_x \frac{\partial u}{\partial x} + C_y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, C_x, C_y = \text{constante} \quad (5.1)$$

onde $u = u(x, y, t)$ é uma função de duas variáveis espaciais, e C_x, C_y são as componentes da velocidade de advecção. Deste modo, a velocidade de advecção é dada por

$$c = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \quad (5.2)$$

Agora será testada a estabilidade dos esquemas para a solução numérica de (5.1) pelo mesmo procedimento adotado na seção 1. Deste modo, as derivadas espaciais são aproximadas por:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{i,j} = -C_x \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} - C_y \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (5.3)$$

Aqui, como é usual para problemas de duas dimensões, muda-se o subscrito, denotando os pontos de grade ao longo eixo do x , de modo que as coordenadas dos pontos de grade, são agora $x = i\Delta x$, $y = j\Delta y$, e os valores aproximados $u(i\Delta x, j\Delta y)$ são denotados por $u_{i,j}$. Como uma solução experimental de (5.3) substitui-se

$$u_{i,j} = \text{Re}[e^{i(k_j\Delta x + l_j\Delta y)}] \quad (5.4)$$

dando a equação de oscilação

$$\frac{dU}{dt} = i \left(-\frac{c_x}{\Delta x} \text{sen}(k\Delta x) - \frac{c_y}{\Delta y} \text{sen}(l\Delta y) \right) U \quad (5.5)$$

Se o esquema do *leapfrog* é utilizado para a derivada temporal, obtêm-se, como o critério de estabilidade

$$\left| \left(\frac{c_x}{\Delta x} \text{sen}(k\Delta x) + \frac{c_y}{\Delta y} \text{sen}(l\Delta y) \right) \Delta t \right| < 1 \quad (5.6)$$

Essa desigualdade deve ser satisfeita para todos valores admissíveis dos números de onda k e l .

Por simplicidade, serão considerados somente os casos onde $\Delta x = \Delta y = d^*$; sendo d^* o tamanho da grade. No plano do número de onda, que é um diagrama com coordenadas k e l , os números de onda admissíveis são contidos dentro da região quadrada mostrada na fig. 5.1 A região com o máximo valor do lado esquerdo de (5.6) é obtido no centro do quadrado, marcada por um círculo. A onda representada por aquele ponto, tem comprimentos de onda $4d^*$ em ambas as direções x e y de modo que:

$$\text{sen}(k\Delta x) = \text{sen}(l\Delta y) = 1.$$

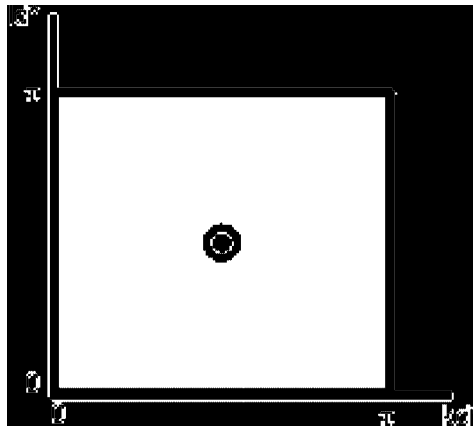


Figura 5.1 Região admissível de nº de onda para uma grade quadrada de 2dim., com comprimento $\Delta x = \Delta y = d^*$.

Para um dado valor da velocidade de advecção o lado esquerdo de (5.6) tem um valor de máximo neste ponto se a velocidade de advecção fizer um ângulo de $\pi/4$ com o eixo do

x . Neste caso $C_x = C_y = \frac{\sqrt{2}}{2} c$. Deste modo é obtido o critério de estabilidade.

$$\sqrt{2}c \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad (5.7)$$

Portanto, no caso de duas dimensões escolhe-se um passo de tempo que é $\sqrt{2}$ menor que o permitido no caso unidimensional.

6. Erro de Aliasing e Instabilidade não linear

Outra generalização da equação de advecção unidimensional é considerar a equação de advecção não linear:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (6.1)$$

sendo, $u = u(x,t)$.

Shuman (1974) chamou (6.1) a equação de choque. Sua solução geral (p.ex., Platzman, 1964) é:

$$u = f(x-ut),$$

como pode prontamente ser verificado. Aqui f é uma função arbitrária.

Aqui será considerado unicamente o efeito da multiplicação em (6.1). Quando feito por diferenças finitas, isto resulta em um erro relacionado à inabilidade da grade de resolver comprimentos de onda mais curtos que $2\Delta x$, isto é, números de onda maiores que $k_{\max} = \pi/\Delta x$. Deste modo, considera-se uma função $u(x)$ que pode ser representada por valores em ponto de grade, por exemplo

$$u = \sin kx, \quad (6.2)$$

sendo $k < k_{\max}$. Entretanto, substituindo (6.2) dentro o termo do não-linear de (6.1) têm-se

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = k \sin kx \cos kx = \frac{1}{2} k \sin 2kx \quad (6.2.1)$$

Se o número de onda em (6.2) está no intervalo $\frac{1}{2} k_{\max} < k \leq k_{\max}$, o termo não-linear pode gerar um número de onda que está além do alcance que pode ser resolvido pela grade; portanto, isso não pode ser propriamente reproduzido em um cálculo de diferenças finitas. Para analisar o que acontece nessa situação, considere um onda com $k > k_{\max}$. Por exemplo, $L = 4\Delta x / 3$. A onda com esse comprimento de onda está mostrado pela linha azul na fig. 6.1. Conhecendo unicamente os valores nos pontos de grade não se é capaz de distinguir

este onda da mostrada pela linha vermelha. Deste modo, com a convenção adotada, assume-se que as ondas apresentam um erro. Isto é chamado erro do “aliasing”

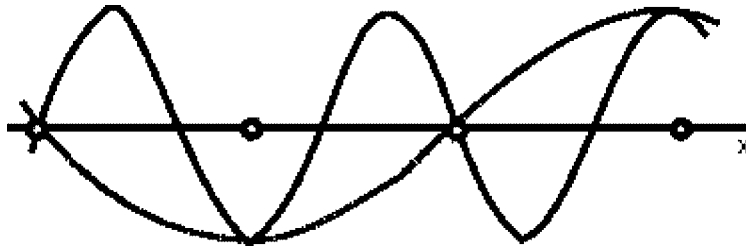


Figura 6.1 Onda de comprimento de onda $4\Delta x/3$ (azul), mal representada por uma grade de dif. finitas com uma onda de comprimento de onda $4\Delta x$ (vermelha).

Em um mais caso geral, supõe-se que a função u consiste de um número de componentes harmônicos

$$u = \sum_n u_n \quad (6.2.2)$$

O termo não linear contém produtos de harmônicos de diferentes comprimentos de onda diferentes, tais como:

$$\text{sen}(k_1 x) * \text{sen}(k_2 x). \quad (6.2.3)$$

Entretanto

$$\text{sen}(k_1 x) \text{sen}(k_2 x) = \frac{1}{2} [\cos(k_1 - k_2)x - \cos(k_1 + k_2)x]. \quad (6.2.4)$$

Deste modo, mesmo que um cálculo de diferenças finitas seja iniciado com ondas com $k \leq k_{\max}$, através de um processo de interação não linear, ondas podem ser formadas com $k > k_{\max}$ e assim, uma má representação das ondas pode ocorrer.

Em geral, escreve-se:

$$\text{sen}(kx) = \text{sen} [2 k_{\max} - (2 k_{\max} - k)x]. \quad (6.2.5)$$

Substituindo aqui $k_{\max} = \pi/\Delta x$ e usando a fórmula do seno da diferença, obtêm-se:

$$\text{sen}(kx) = \text{sen} \frac{2\pi}{\Delta x} x \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta x} - k \right) x - \cos \frac{2\pi}{\Delta x} x \text{sen} \left(\frac{2\pi}{\Delta x} - k \right) x \quad (6.2.6)$$

Entretanto, nos pontos de grade $x = j\Delta x$ e

$$\begin{aligned} \text{sen} \left(\frac{2\pi}{\Delta x} \right) j\Delta x &= 0, \\ \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta x} \right) j\Delta x &= 1. \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

Encontra-se

$$\text{sen}(kj\Delta x) = -\text{sen} [2 k_{\text{max}} - (2 k_{\text{max}} - k) j\Delta x]. \quad (6.3)$$

Desta forma, vê-se que conhecendo unicamente os valores do ponto de grade, não se pode distinguir os números de onda k dos $2 k_{\text{max}} - k$. Deste modo, se $k > k_{\text{max}}$ usando a convenção mencionada anteriormente, pode-se dizer que o número de onda k é mal representado como o número de onda:

$$K^* = 2 k_{\text{max}} - k. \quad (6.4)$$

Daqui, como mostrado na fig.6.2, a onda resultante tem um número de onda k^* , que é menor que k_{max} por uma quantidade igual a $-k$. Pode-se pensar que o número de onda k^* como sendo uma imagem obtida pela reflexão de k através o k_{max} dentro do domínio de valores admissíveis de números de onda.

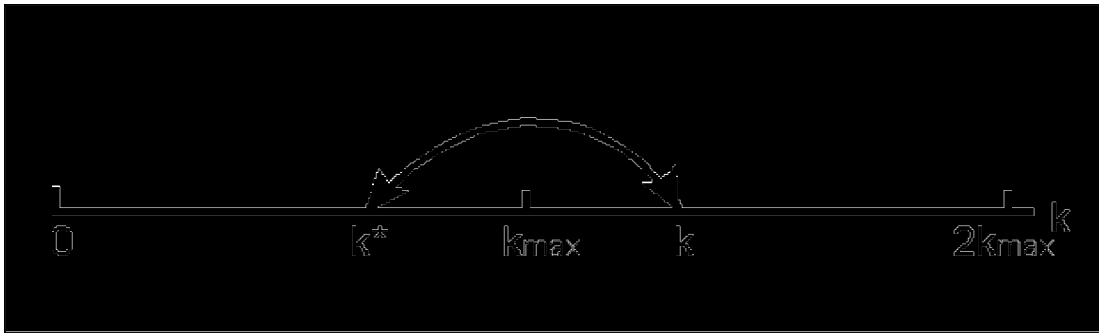


Figura 6.2 Má representação do nº de onda $k > k_{\text{max}}$, de acordo com (6.4).

Um exemplo que pode ser considerado é o caso $L = 4\Delta x/3$, ilustrado na figura 6.1. Quando $k = 3\pi/2\Delta x$, e (6.4) dá $k^* = \pi/\Delta x$ como o número de onda visto na grade de diferença finita. Ou seja é a mesma onda, de comprimento de onda $4\Delta x$, como vista na figura.

Bibliografia:

Courant, R., Friedrichs, K. and Lewy, H., 1928: Über die partiellen Differengleichungen der mathematischen physik. Math. Annalen, 100, 32-74.

Haltiner, G. J. and R. T. Willians, 1971: Numerical Prediction and Dynamic Meteorology - Jonh Wiley & Sons, 477 pp.

- Lax, P. D. and Wendroff, B. , 1960: Systems of Conservation Laws. Commun. Pure Appl. Math, 13.
- Mesinger, F. and A. Arakawa, 1976: Numerical Methods used in Atmospheric Models. GARP - WMO, 76 pp.
- Phillips, N. A., 1960: Numerical Weather Prediction - Advances in Computers, New York, Academic Press.
- Platzman, g. W., 1964. An exact integral of complete spectral equations for unsteady one-dimensional flow. Dynamical Prediction Group, Dept. of the Geophysical Sciences, Univ. of Chicago, Tech. Rept. 16, 28 pp.
- Shuman, F. G., 1974: Analysis and experiment in nonlinear computation stability. Difference and Spectral Methods for Atmosphere and Ocean Dynamics Problems, Proc. Symp., Novosibirsk, Part I, 51-81.
- Wurtele, M. G., 1961: On the problem of truncation error. Tellus, 13, 379-391.

Exercícios:

O exercício resolvido no “*excel*” apresenta a resolução da equação da advecção utilizando:

equação 1.18.

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + c^2 \Delta t \frac{u_{j+2}^n - 2u_j^n + u_{j-2}^n}{(2\Delta x)^2}$$

equação 3.2a

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

equação 3.2

$$u_j^{n+1} = u_{j-1}^n + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} (\Delta x - c\Delta t).$$

A equação a ser resolvida foi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Exercício proposto:

Resolver a equação da advecção em 2 dimensões utilizando um dos esquemas propostos.

A equação a ser resolvida será:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_x \frac{\partial u}{\partial x} + c_y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Considere $C_x = C_y = 1$ e $\Delta x = \Delta y = 10$, e $u = 10\text{m/s}$